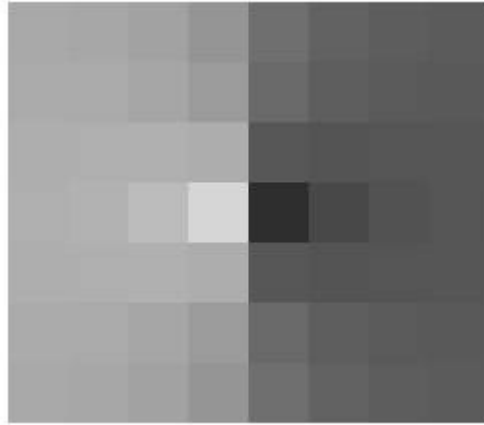
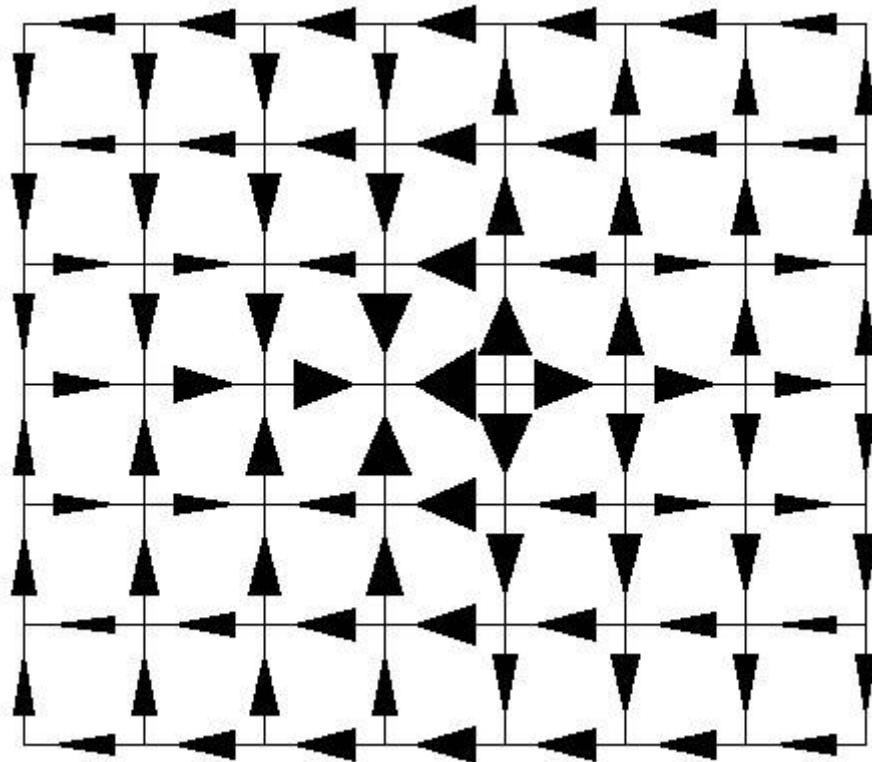


Ebene Gitter mit zentralem Knotenpaar



7_x8



Ebene Gitter mit zentralem Knotenpaar

Gedanken und Berechnungen von Hendrik Herrmann,
aufgeschrieben vom Fritz Ostermann im Nov 2011
für Arnold Schönhage zum 77. Geburtstag

Es werden $m \times n$ -Gitter, $m, n \in \mathbf{N}$, betrachtet, in denen benachbarte Knoten durch Leitungen von 1 Ohm Widerstand verbunden sind. Bei ungeradem m und geradem n , also wenn $m = 2 \cdot \mu + 1$, $n = 2 \cdot \nu$ mit $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ und $\mu, \nu \geq 1$ ist, gibt es im Gitter ein *zentrales Knotenpaar*, nämlich (K_i, K_{i+1}) mit $i = \mu \cdot n + \nu$, wobei die $m \cdot n$ Knoten des Gitters, links oben mit $i = 0$ beginnend, Zeile für Zeile von links nach rechts durch gezählt sind. Zwischen den Knoten des zentralen Paares ist mittels einer Spannungsquelle (Akku), wobei der Minuspol am zentralen Knoten K_i verbunden, die Spannung 1 Volt gelegt. Es wird gezeigt, wie man die Stromstärke s in Ampere berechnet, die durchs Gitternetz von K_{i+1} nach K_i fließt und im Stromkreis dann weiter durch den Akku zurück nach K_{i+1} . Der Gleichstrom-Widerstand des Gitternetzes zwischen den zentralen Knoten wäre damit $R = 1/s$ in Ohm. Zur Berechnung von s wird anhand der Kirchhoff'schen Gesetze ein LGS für die $m \cdot n$ Potentialwerte x_i an den Knoten K_i , $0 \leq i \leq m \cdot n$ aufgestellt. Zur Lösung wird dies System auf ein System LGS* mit $(\mu+1) \cdot \nu$ Variablen reduziert. Das Programm der Berechnung von s alias R ist in Ganzzahl-Arithmetik geschrieben und erzeugt intern rationale Werte für s und R ohne Rundungsfehler..

77x12 -Gitter

Als Sinnbild für die am 1. Dezember 2011 vollendeten 77 Lebensjahre = $77 \cdot 12 = 924$ Monate diene das 77×12 -Gitter mit seinen $77 \cdot 12 = 924$ Knoten und dem zentralen Knotenpaar (K_{462}, K_{463}) . Wir nennen es „Geburtstag-Gitter“ .. Die Berechnung von R auf dem Homecomputer ergab nach ca. 15 min folgendes Resultat, näherungsweise angegeben in Dezimalbruchdarstellung
 $R = 0,50183313495883798127... .$

Die Tabelle **77x12-Pot** im Anhang zeigt die Potentiale an den Knoten des Geburtstagsgitters, wobei das Potentialniveau beim zentralen Knoten K_{463} , an dem der Pluspol des Akkus angelegt ist, auf $+\frac{1}{2}$ gesetzt ist, und damit der Minuspol des Akkus am Knoten K_{462} das Potential $-\frac{1}{2}$ hat. In der Mitte der direkten Verbindung der zentralen Knoten, dem *Mittelpunkt O* des Gitters, ist somit das Potential = 0. Das Potentialfeld **77x12-Pot** ist in Bezug auf **O** anti-symmetrisch, also punktsymmetrisch bezüglich der Beträge der Potentiale. Hebt man das Niveau um $\frac{1}{2}$, ergibt sich das Potentialfeld **77x12-Pot°** mit dem üblichen Potentialwert =0 am Minuspol.

Die nach einer Idee von Jörg Ostermann von Hendrik Herrmann gestalteten Graphiken **77x12-Mos** (Abb.1a) und **77x12-Mos°** (Abb.1b) zeigen Interpretationen der Potentialverteilungen von **77x12-Pot**, bzw. **77x12-Pot°**.

In Abb.1a sind die Beträge der reziprok in Helligkeit und die Vorzeichen durch $(-, +) =$ (blau, rot) umgesetzt. In Abb.1b sind die Werte nur in reziproke Helligkeit umgesetzt.

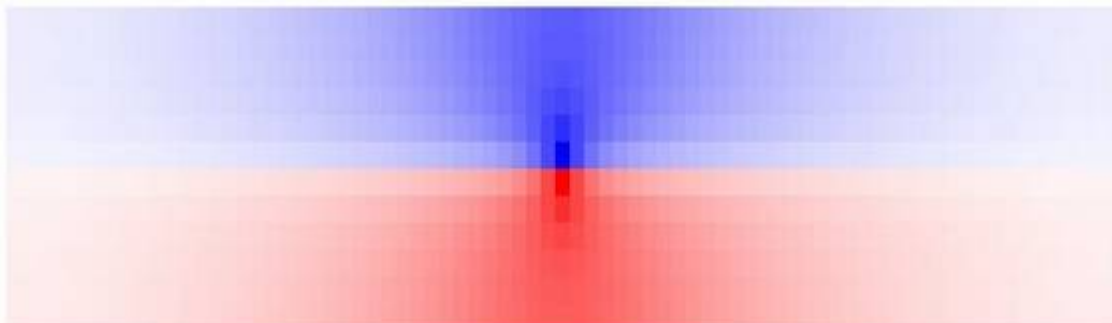


Abb 1a. Horizontal gelegtes **77x12-Mos** mit vertikal liegendem zentralen Knotenpaar.

Im zentralen Knotenpaar ist das Potential $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gesetzt. Der Strom fließt vom höheren zum niederen Potential. Er startet im zentralen Knotenpaar am Pluspol des Akkus nahe der Mitte des Bildes, strömt im roten Feld vom Dunklen ins Helle, quert die Farbgenze, und fließt dann in der blauen Hälfte vom Hellen ins Dunkle zum Minuspol. In der linken Hälfte des Bildes zirkuliert er im Uhrzeigersinn, in der rechten im G.U.Z. .

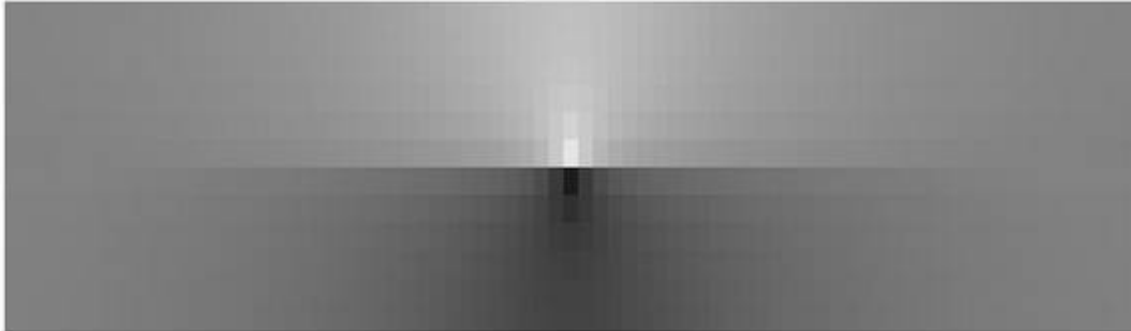


Abb 1b. Horizontal gelegtes **77x12-Mos°** mit vertikal liegendem zentralen Knotenpaar. Im Unterschied der Helligkeit zeigt sich der Betrag der Potentialdifferenzen.

Die folgende Graphik en (Abb.2a, 2b) interpretieren die Beträge und zeigen die Richtung der Potentialdifferenzen zwischen den Knoten des 77x12-Gitters durch richtungsweisende kleinen Dreiecke, in Abb.2a mittels Graustufen, in Abb.2b durch die Größe der Dreiecke.

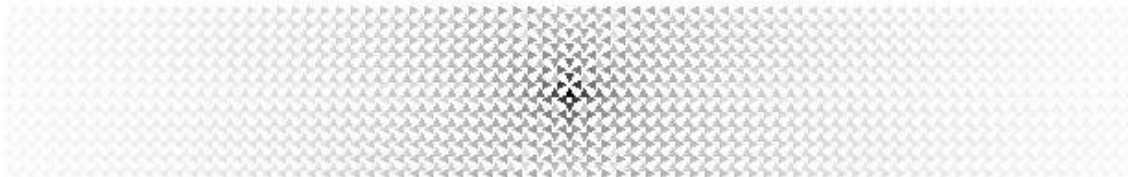


Abb.2a. Stärke des Stromflusses in Graustufen und Richtungsanzeige mittels Dreiecken

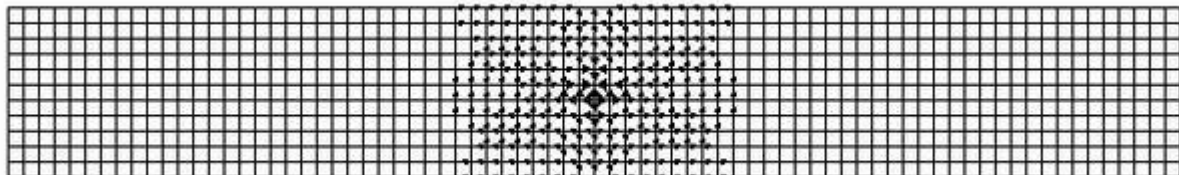


Abb.2b. Stärke und Richtung des Stromflusses mittels der Größe kleiner Dreiecke. Der wesentliche Stromfluss erfolgt im nahen Umfeld des zentralen Knotenpaares.

Ohm'scher Widerstand bei Tageszählung

Vom Tag der Geburt am 1. Dezember anno 1934 bis zum 77. Geburtstag hat man **365*77 + 19 = 28124 Tage** unterschiedlicher Art durchlebt. So viele Knoten hat auch ein **89 x316-Gitter** mit dem zentralen Knotenpaar (K_{14062}, K_{14063}) .

Der Ohmsche Widerstand in diesem Gitternetz bei angelegter Spannung an den zentralen Knoten ist **$R \sim 0.50006610810459775702\dots$** Berechnet in ca. 2h 50 min)..

145x144 –Gitter

Theoretisch ist bewiesen (siehe etwa [2]), dass in einem unendlichen Gitter mit 1 Ohm-Verbindungen zwischen den Knoten sich bei Anlegen von 1 Volt Spannung an zwei benachbarten Knoten sich zufolge der Kirchhoff'schen Gesetze ein Strom **$s = 2$ Ampere** fließen müsste und damit der Netzwidestand **$R = \frac{1}{2}$ Ohm** wäre. Eine Beweisidee hierfür hat Hendrik Herrmann gefunden . Sie führt zur Darstellung

$$R = \frac{2}{\pi} \cdot J, \text{ wobei } J = \int_0^{\pi} \frac{1}{3 - \cos(x) + \sqrt{(2 - \cos^2(x))^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{4}, \text{ sodass also } R = \frac{1}{2} \text{ Ohm} .$$

Solch Ergebnis lässt vermuten, dass in „quasi-quadratischen „ $m \times n$ – Gittern mit zentralem Knotenpaar, wobei etwa $m = n+1$, für wachsendes m der Netz-Widerstand zwischen den zentralen Knoten dem Wert $\frac{1}{2}$ beliebig nahe kommt. Ein Beweis dieser Vermutung würde bedeuten, dass sich $R = \frac{1}{2}$ Ohm als Grenzwert jeder Folge von $m \times n$ –Gittern mit fixiertem Knotenpaar ergibt, falls sowohl m als auch n beliebig groß werden, denn in solchen Folgen kann man stets eine Teilfolge fast-quadratischer $m \times n$ –Gitter mit zentralem Knotenpaar auswählen.

Hendrik Herrmann hat auf seinem Heimcomputer alle Potentiale zum **145x144 –Gitter** unter der Potential-Vorgabe $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ fürs zentrale Knotenpaar an den Stellen $(73,72)$ und $(73,73)$ den Widerstand in Ganzzahl-Arithmetik berechnet.

Es ergab sich in Dezimalbruch-Darstellung:

$$R = 0,5000260730727721011....$$

Die $73 \times 72 = 5256$ Variablen des LGS* hat er rekursiv auf 73 Variablen in der Matrix M^* des LGS* bezogen und das sich ergebende LGS** für nur die 73 Variablen in einer Rechenzeit von ca. 4h gelöst .

Angeregt zu dieser Reduktion des LGS* aufs LGS** wurde er durch die rekursiven Widerstandberechnungen bei Doppel- und Tripel-Leiter in unendlichen Gittern von Arnold Schönhage [1], die dieser im Dezember 2008 Gert Regensburg mitteilte.

Berechnung von R im 5x4 -Gitter

Ein 5×4 –Gitter wird in den Blick genommen. . Die Methode, wie man das LGS aufstellt , es in ein reduziertes LGS* umformt und damit dann die Potentiale im 5×4 –Gitter bestimmt sowie schließlich die Stromstärke s und den Widerstand R bei angelegter Spannung von 1 Volt an den zentralen Knoten ermittelt, wird an diesem Gitter exemplarisch dargelegt.

Das LGS des 5x4 Gitters

Die 20 Knoten $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{19}$ vom 5×4 Gitter sind in jeder Zeile von links nach rechts gezählt., wobei die Zeilen von oben nach unten genommen. Die direkten Verbindungen der Knoten des Gitters haben alle den Widerstand 1 Ohm. Nach den Kirchhoff'schen Gesetzen ist x Lösung eines LGS $M x = b$, hier vonder Gestalt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wenn am zentralen Knoten K_9 das Potential auf 0 und die Spannung $U = 1$ Volt angelegt ist

in einem Knotenfeld 5×4 -GK =
$$\begin{bmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 & K_7 \\ K_8 & K_9 & K_{10} & K_{11} \\ K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} \end{bmatrix} .$$

Der Spaltenraum $V_s \subseteq \mathbb{R}^{21}$ von M hat $\dim(V_s) \leq 19$, denn die Summe der 20 Spalten von M ergibt den Nullvektor $\mathbf{0}$. Der Spaltenvektor \mathbf{b} gehört zu V_s . Also ist $\dim(L) \geq 1$ für den Lösungsraum $L \subseteq \mathbb{R}^{20}$ des LGS $M \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Das Niveau der Potentiale ist in der Lösung \mathbf{x} frei wählbar. Oben wurde $x_{10} = 1$, ist $x_9 = 0$ gesetzt. Computergestützt in Ganzzahl-Arithmetik ergibt sich

$$L_s = \mathbf{x}^\circ + r \cdot (1, 1, 1, \dots, 1) \subseteq \mathbb{R}^{20}, r \in \mathbb{R}, \text{ wobei}$$

$$\mathbf{x}^\circ = \frac{1}{98} \cdot (36, 42, 56, 62, 30, 34, 64, 68, 20, 0, 98, 78, 30, 34, 64, 68, 36, 42, 56, 62)$$

Man hat damit folgendes Potentialfeld im Knotenfeld 5×4 -GK :

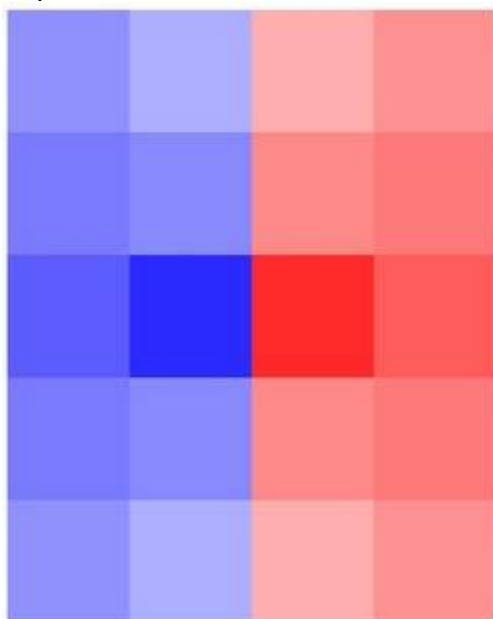
$$5 \times 4 \text{ -Pot}^\circ = \frac{1}{98} \cdot \begin{bmatrix} 36 & 42 & 56 & 62 \\ 30 & 34 & 64 & 68 \\ 20 & 0 & 98 & 78 \\ 30 & 34 & 64 & 68 \\ 36 & 42 & 56 & 62 \end{bmatrix} .$$

Im technischen Sprachgebrauch fließt elektrischer Strom vom höheren zum niederen Potential und seine Stärke J ergibt sich aus der durchlaufenen Potentialdifferenz U sowie dem zu überwindenden Widerstand R nach dem Ohmschen Gesetz $U = R \cdot J$.

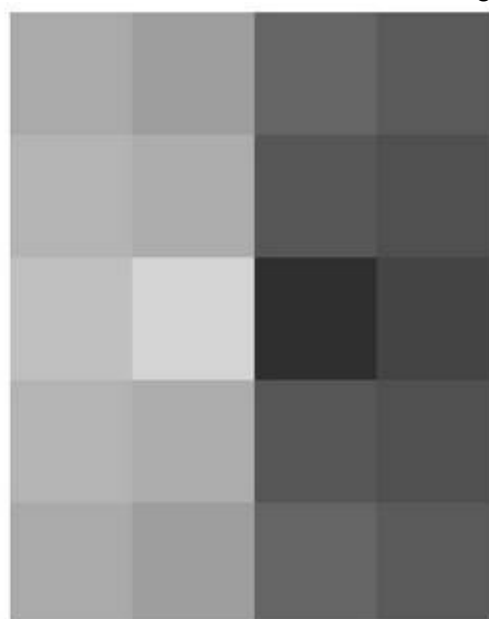
In 5×4 -Pot $^\circ$ sind am zentralen Knotenpaar (K_9, K_{10}) die Potentiale auf $(0, +1)$ gesetzt. Mit der Vorgabe $x_{10} = \frac{1}{2}$ anstelle von $x_{10} = 1$ senkt man das Niveau um $\frac{1}{2}$. Es ergibt sich

$$5 \times 4 \text{ -Pot} = \frac{1}{98} \cdot \begin{bmatrix} -13 & -7 & 7 & 13 \\ -19 & -15 & 15 & 19 \\ -29 & -49 & 49 & 29 \\ -19 & -15 & 15 & 19 \\ -13 & -7 & 7 & 13 \end{bmatrix} ,$$

Interpretationen der Potentiale von 5×4 -pot und 5×4 -Pot $^\circ$ an den 20 Knoten zeigt Abb.3..



5x4-Mos

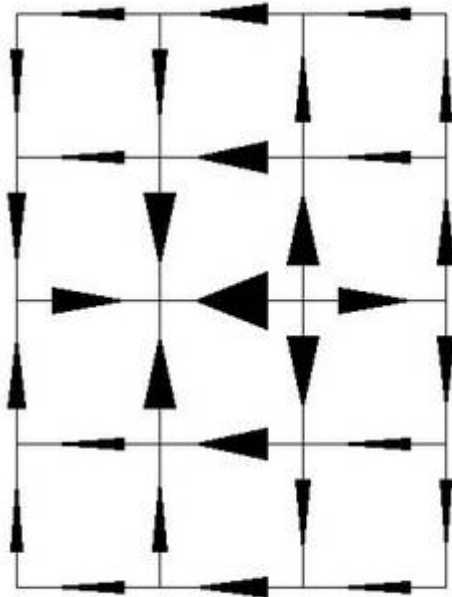


5x4-Mos $^\circ$

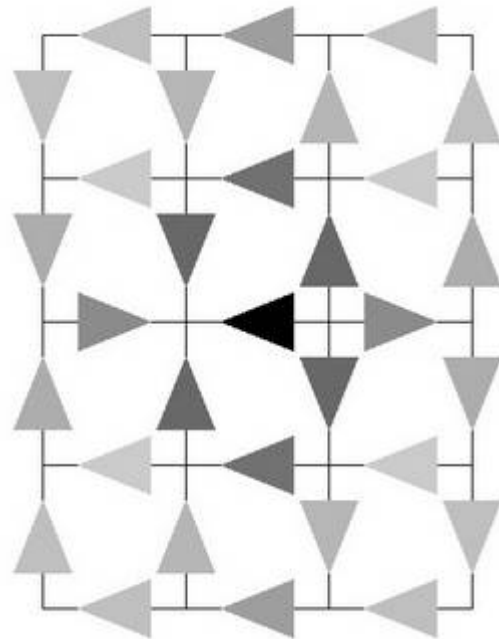
Abb.3. Potentialfelder im 5×4 -Gitter mit horizontalem zentralen Knotenpaar.

In 5x4-Mos liegt $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ am zentralen Knotenpaar, in 5x4-Mos^o liegt dort $(0, +1)$ an. Die Stufen der Helligkeit entsprechen reziprok den Beträgen der Potentiale an den Knoten. Die Vorzeichen $(-, +)$ der Potentiale korrespondieren in 5x4-Mos dem Paar (blau,rot).

Der Fluss des Stroms zwischen den Knoten ergibt sich in Stärke und Richtung aus den Differenzen der Potentiale benachbarter Knoten im Gitter. Die Stärke korrespondiert dem Betrag, die Richtung dem Vorzeichen der Differenz. In den Graphiken 5x4-Fluss (1) und 5x4-Fluss (2) (Abb.4) wird das Vorzeichen durch die Stellung von Dreiecken dargestellt. Der Betrag wird in 5x4-Fluss (1) in Größe, in 5x4-Fluss (2) reziprok in Helligkeit umgesetzt.



5x4-Fluss (1)



5x4-Fluss (2)

Abb.4. Stromfluss im 5x4-Gitter vom höheren zum niederen Potential .

Der Strom startet rechts von der Mitte des Bildes beim höchsten Potential im zentralen Knoten K_{10} . Der Teil des Stroms, der nicht direkt nach K_9 fließt, verzweigt sich in die rechte Seite, quert mittig die Vertikale von rechts nach links und zirkuliert in der linken Seite weiter bis zum zentralen Knoten K_9 links der Mitte des Bildes. In der oberen Hälfte zirkuliert er im GUZ, in der unteren im Uhrzeigersinn. Die Stärke der Teilströme von Knoten zu Knoten symbolisiert die Größe der Dreiecke bzw. die Helligkeit, wobei starker Strom dunkel und schwacher Strom hell.

In der folgenden Tafel 5x4-Fluss (Abb.4a), sind neben der Richtung die konkreten Werte der Stromstärke zwischen den Knoten des 5x4-Gitters in 1/98 Ampere, angegeben.

5x4 –Fluss = :

\oplus	$\leftarrow 6$	\oplus	$\leftarrow 14$	\oplus	$\leftarrow 6$	\oplus
$\downarrow 6$		$\downarrow 8$		$8 \uparrow$		$6 \uparrow$
\oplus	$\leftarrow 4$	\oplus	$\leftarrow 30$	\oplus	$\leftarrow 4$	\oplus
$\downarrow 10$		$\downarrow 34$		$34 \uparrow$		$10 \uparrow$
\oplus	$20 \rightarrow$	K_9	$\leftarrow 98$	K_{10}	$20 \rightarrow$	\oplus ..
$\uparrow 10$		$\uparrow 34$		$34 \downarrow$		$10 \downarrow$
\oplus	$\leftarrow 4$	\oplus	$\leftarrow 30$	\oplus	$\leftarrow 4$	\oplus
$\uparrow 6$		$\uparrow 8$		$8 \downarrow$		$6 \downarrow$
\oplus	$\leftarrow 6$	\oplus	$\leftarrow 14$	\oplus	$\leftarrow 6$	\oplus

Abb.4a. Richtung und Stärke des Stromflusses im 5x4-Gitter ..

Berechnung des Netz-Widerstands

Den Gesamtstrom s von K_{10} zum Knoten K_9 kann man durch den 4-wegigen Abfluss von K_{10} darstellen. Demnach ist

$s = (98 - 0 + 2 \cdot (98 - 64) + 98 - 78) / 98 = (98 + 88) / 98 = 186 / 98 = 93 / 49 \approx 1.89797 \dots$ Ampere
 .Dieser Strom fließt dann weiter durch den Akku zurück zum Knoten K_{10} .
 Aus s ergibt sich $R = 1/s = 49/98 \approx 0,52688172 \dots$.

Das LGS* des 5x4 Gitters

Die Stromstärke s im Netz vom K_{10} nach K_9 ist Summe von Teilströmen s_1, s_2 , wobei
 a) s_1 der Strom durch die direkte Verbindung der zentralen Knoten, also $s_1 = 1$ Ampere,
 b) s_2 , der von K_{10} auf direkten Verbindungen in die rechte Hälfte des Gitters fließt

Für den Teilstrom s_2 gibt es drei Darstellungen durch Potential-Differenzen.

- 1) $s_2 = x_{10} - x_6 + x_{10} - x_{11} + x_{10} - x_{14} = 3 \cdot x_{10} - x_6 - x_{11} - x_{14}$,
- 2) $s_2 = x_2 - x_1 + x_6 - x_5 + x_{14} - x_{13} + x_{18} - x_{17}$,
- 3) $s_2 = x_5 - x_9 + x_8 - x_9 + x_{13} - x_9 = -3 \cdot x_9 - x_5 - x_8 - x_{13}$.

In 2) wird s_2 als Summe der Teilströme dargestellt, die von der rechten Hälfte des Gitters in die linke Seite führen, ausgenommen der direkt vom K_{10} nach K_9 fließende s_1 ,
 in 1) wird s_2 als Summe der Teilströme berechnet, die von K_{10} in die rechte Hälfte abfließt
 und in 3) als Summe der Teilströme, die in der linken Hälfte nach K_9 hineinfließt .

Zufolge der Symmetrien in den physikalischen Vorgaben gilt allgemein:

Wenn man im zentralen Knotenpaar das Potentialpaar $(-1/2, +1/2)$ vorgibt, ist die Lösung antisymmetrisch und es zeigt sich in der Matrix 5x4 Pot bzgl. der horizontalen Mittellinie Spiegelsymmetrie und bezüglich der senkrechten Mittellinie Anti-Spiegelsymmetrie, d.h. Spiegelsymmetrie und Vorzeichenwechsel.

Explizit sind das die folgende Identitäten.

$$\text{Vertikal: } \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_8 \\ x_{12} \\ x_{16} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_3 \\ x_7 \\ x_{11} \\ x_{15} \\ x_{19} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_9 \\ x_{13} \\ x_{17} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_2 \\ x_6 \\ x_{10} \\ x_{14} \\ x_{18} \end{bmatrix} \quad \text{und horizontal} \quad \begin{matrix} (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3) = (x_{16} \ x_{17} \ x_{18} \ x_{19}) \\ (x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7) = (x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15}) \end{matrix} \dots$$

Rein formal zeigt sich all dies in den Symmetrien der Systemmatrix M zusammen mit der antisymmetrischen Vorgabe $(-1/2, +1/2)$ der Potentiale fürs zentrale Knotenpaar.

Den Lösungsvektor x zur Vorgabe $x_{10} = +1/2$ kann man also ansetzen::

$$x = (-x_3, -x_2, x_2, x_3, -x_7, -x_6, x_6, x_7, -x_{11}, -1/2, +1/2, x_{11}, -x_7, -x_6, x_6, x_7, -x_3, -x_2, x_2, x_3)$$

Das zeigt: Zur Lösung des LGS $Mx = b$ genügt es den Vektor

$z = (x_{10}, x_{11}, x_6, x_7, x_2, x_3)$ zu bestimmen, wobei $x_{10} = +1/2$ vorgegeben. .

Statt $Mx = b$ mit 20 Variablen wäre also ein LGS* $M^*z = b^*$ mit 6 Variablen zu lösen.

Die Koeffizienten der Matrix M^* findet man teils anhand der Koeffizienten von M und weiteren Interpretation der Variablen anhand der Kirchhoff'schen Regeln.

Zur Festlegung von M^* betrachten im Gitter **5x4 GK** den Quadrant

$$3x2 \text{ -GK}^* = \begin{bmatrix} K_2 & K_3 \\ K_6 & K_7 \\ K_{10} & K_{11} \end{bmatrix}, \text{ der rechts oben im 5x4 GK liegt.}$$

Im Knoten K_{10} ist das Potential $x_{10} = +1/2$ angelegt.

Eine Gleichung für die Komponenten von

$$z = (x_2, x_3, x_6, x_7, x_{10}, x_{11}) \text{ .mit der Vorgabe } x_{10} = +1/2$$

.ergibt sich wie folgt:

Der von K_{10} gemäß 1) in die rechte Seite des 5x4 Gitters fließende Strom s_2 lässt sich vermöge der Symmetrien in der Matrix 5x4-Pot mittels der Potentiale an den Knoten von 3x3 -GK* durch $s_2 = 3 \cdot x_{10} - x_6 - x_{11} - x_{14} = 3 \cdot x_{10} - 2 \cdot x_6 - x_{11}$

Beim Seitenwechsel von rechts nach links im 5x4-Gitter hat er nach 2) und den Symmetrien die Darstellung $s_2 = 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_6 + 2 \cdot x_{14} + 2 \cdot x_{18} = 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_6$.
 Demnach ist $3 \cdot x_{10} - 2 \cdot x_6 - x_{11} = 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_6$, also $3 \cdot x_{10} - x_{11} - 6 \cdot x_6 - 4 \cdot x_2 = 0$.
 Weitere Gleichungen findet man mittels der Kirchhoff'schen Regeln unter Berücksichtigung der Einbindung von **3x2-GK*** ins Netz von **5x4 -GK**. Es ergibt sich

$$M^* =: \begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4+1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Die aufgeführten Additionen /Subtraktionen zeigen die Abänderungen, die sich mittels der Symmetrien an den betrachteten Knoten ergeben.

$z = (x_{10}, x_{11}, x_6, x_7, x_2, x_3)$ ist dann die Lösung des LGS $M^* z = 0$ mit $x_{10} = +\frac{1}{2}$.

Schrittweise Lösung des Systems $M^* z = 0$

Mit dem Gauß'schen Verfahren ergibt sich die Lösung z ergibt mit folgenden Eliminations-Schritten. Zur Kontrolle sind in oberster Zeile die bereits gesuchten Potentiale in 1/98 angegeben..

(1) 49 29 15 19 7 13

x10	x11	x6	x7	x2	x3	b*
3	-1	-6	0	-4	0	0
-1	3	0	-2	0	0	0
-1	0	5	-1	-1	0	0
0	-1	-1	3	0	-1	0
0	0	-1	0	4	-1	0
0	0	0	-1	-1	2	0

(2) 49 29 15 19 7 13

z10=0.5	K11	x6	x7	x2	x3	b*
	1	6	0	4	0	1.5
	3	0	-2	0	0	0.5
	0	5	-1	-1	0	0.5
	-1	-1	3	0	-1	0
	0	-1	0	4	-1	0
	0	0	-1	-1	2	0

(3) 49 29 15 19 7 13

z10=0.5	K11	K6	K7	K2	K3	B
	1	6	0	4	0	1.5
	0	9	1	6	0	2
	0	5	-1	-1	0	0.5
	0	5	3	4	-1	1.5
	0	-1	0	4	-1	0
	0	0	-1	-1	2	0

(4) 49 29 15 19 7 13

x10=0.5	x11	x6	x7	x2	x3	b*
	1	6	0	4	0	1.5
	0	9	1	6	0	2
	0	0	28	78	0	11

	0	0	4	5	-1	1
	0	0	-1	19	-5	0.5
	0	0	-1	-1	2	0

(5) 49 29 15 19 7 13

x10=0.5	x11	x6	x7	x2	x3	b*
	1	6	0	4	0	1.5
	0	9	1	6	0	2
	0	0	28	78	0	11
	0	0	0	43	7	4
	0	0	0	610	-140	25
	0	0	0	50	56	11

(6) 49 29 15 19 7 13

x10=0.5	x11	x6	x7	x2	x3	b*
	1	6	0	4	0	1.5
	0	9	1	6	0	2
	0	0	28	78	0	11
	0	0	0	43	7	4
	0	0	0	0	10290	1365
	0	0	0	0	2058	273

Damit ergibt sich : $x_3 = 273 / 2058 = 13 / 98$
 $x_2 = (4 \cdot 98 - 7 \cdot 13) / (43 \cdot 98) = 7 / 98$
 $x_7 = (11 \cdot 98 - 78 \cdot 7) / (28 \cdot 98) = 19 / 98$
 $x_6 = (2 \cdot 98 - 6 \cdot 7 - 1 \cdot 19) / (9 \cdot 98) = 15 / 98$
 $x_{11} = (1.5 \cdot 98 - 4 \cdot 7 - 6 \cdot 15) / (1 \cdot 98) = 29 / 98$
 $x_{10} = 0.5 = 49 / 98$.

Also ist $z = \frac{1}{98} \cdot (49, 29, 15, 19, 7, 13)$ und damit

$$3x_2\text{-Pot} = \frac{1}{98} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ 15 & 19 \\ 49 & 29 \end{bmatrix} \text{ und } 5x_4\text{-Pot} = \frac{1}{98} \cdot \begin{bmatrix} -13 & -7 & 7 & 13 \\ -19 & -15 & 15 & 19 \\ -29 & -49 & 49 & 29 \\ -19 & -15 & 15 & 19 \\ -13 & -7 & 7 & 13 \end{bmatrix} .$$

Der Gesamtstrom vom Knoten K_{10} zum Knoten K_9 durchs Netz ist somit
 $s = 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_6 + 2 \cdot x_{10} = (28 + 60 + 98) / 98$
 $= 186 / 98 = 93 / 49 \approx 1.89797... \text{ Ampere} .$

Es fließen also $s = 93/49$ Ampere durchs Gitter von K_{10} nach K_9 und durch den Akku dann zurück nach K_{10} . Im Gitter fließen dabei $s_1 = 1$ Ampere auf direktem Weg von K_{10} nach K_9 und $s_2 = 44/49$ Ampere auf Umwegen zum Knoten K_9 . Der Ohm'sche Widerstand im Gitternetz bei angelegter Spannung an den Knoten K_9, K_{10} ist somit
 $R = 1 \text{ Volt} / s \text{ Ampere} = 49/93 = 0,52688172... \text{ Ohm}.$

Beispiele quasi-quadratischer $(m \pm 1)x_m$ -Gitter

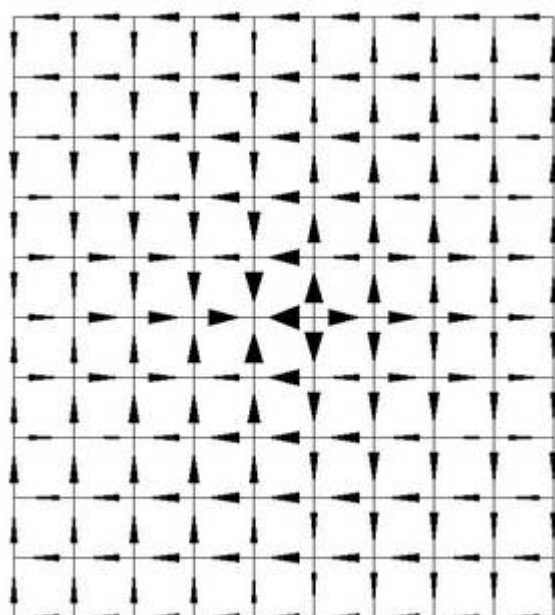
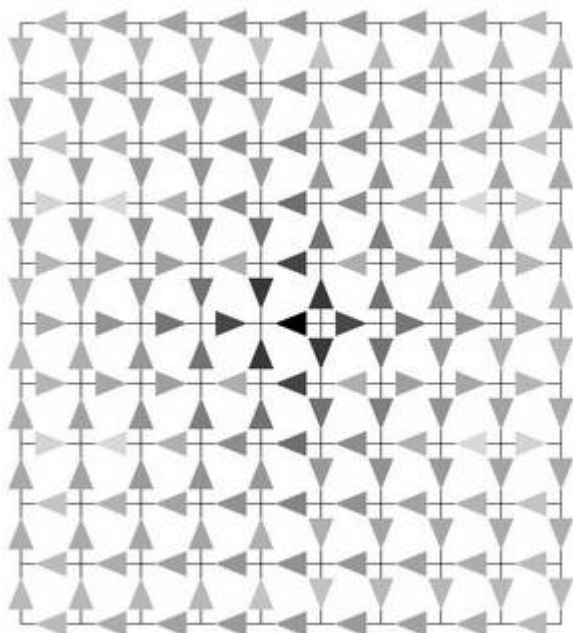
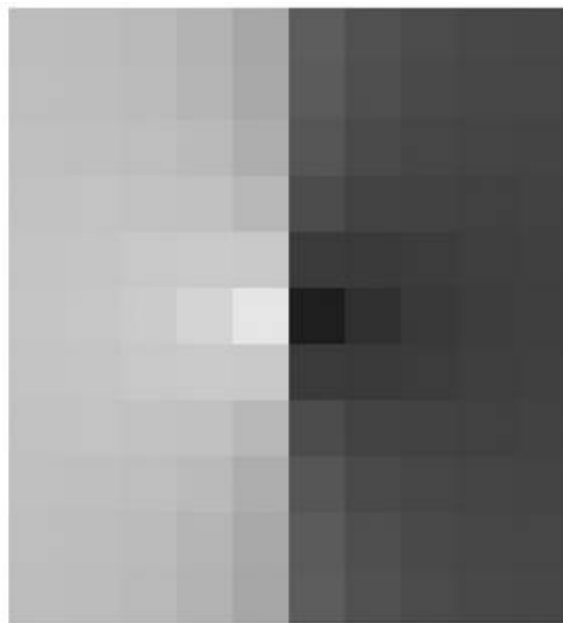
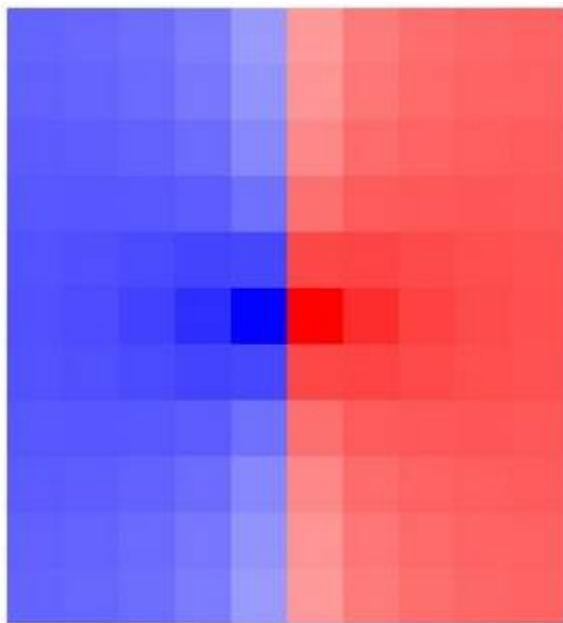
Im folgenden werden Graphiken der Potential- und Stromfelder von quasi-quadratischen Gittern mit 1 Ohm Verbindungen zwischen den Knoten gezeigt, in denen am zentralen Knotenpaar die Spannung 1 Volt angelegt ist und es werden die Anfänge in der Dezimalbruchdarstellung der Netzwidestände angegeben.

Das obige 5x4-Gitter ist ein Beispiel eines solchen Gitters. Analog wird in den folgenden Beispielen farb- als auch grau-stufig das sich einstellende Potentialgefälle veranschaulicht sowie in Darstellungen für die sich aus den Potentialdifferenzen ergebenden Ströme zwischen den Knoten deren Richtung und Stärke.

Zu den beiden ersten Beispielen sind zudem die Potentialwerte aufgelistet..

1. Beispiel: 11x10-Gitter

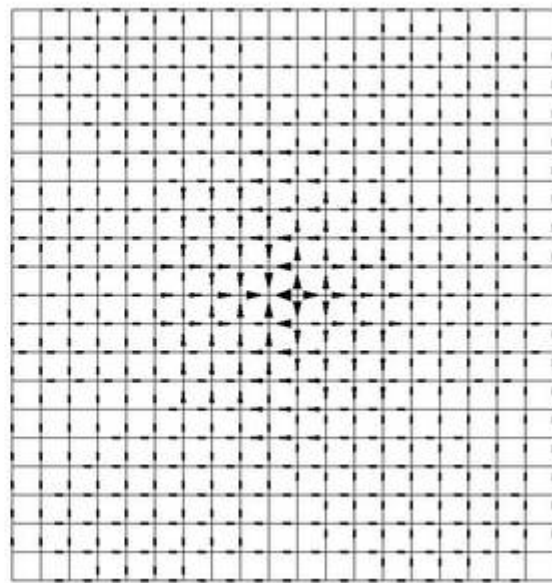
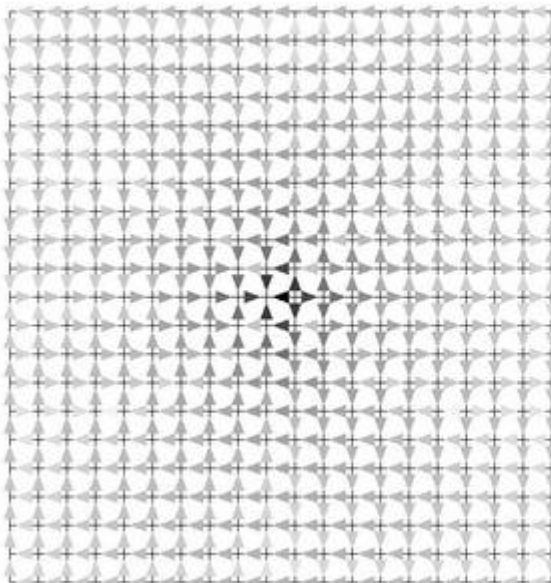
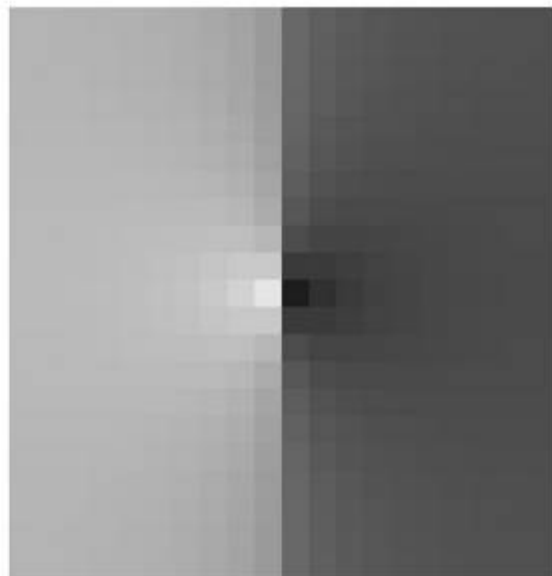
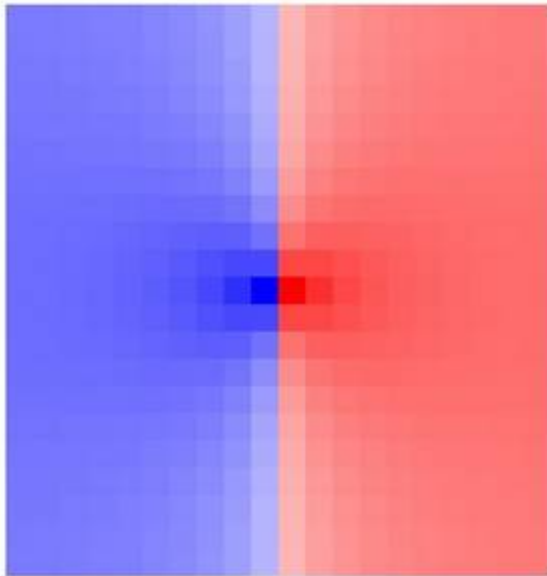
-0,070	-0,065	-0,054	-0,036	-0,013	0,013	0,036	0,054	0,065	0,070
-0,075	-0,070	-0,060	-0,042	-0,016	0,016	0,042	0,060	0,070	0,075
-0,085	-0,082	-0,074	-0,057	-0,024	0,024	0,057	0,074	0,082	0,085
-0,097	-0,098	-0,097	-0,089	-0,050	0,050	0,089	0,097	0,098	0,097
-0,109	-0,115	-0,129	-0,149	-0,140	0,140	0,149	0,129	0,115	0,109
-0,114	-0,125	-0,155	-0,238	-0,500	0,500	0,238	0,155	0,125	0,114
-0,109	-0,115	-0,129	-0,149	-0,140	0,140	0,149	0,129	0,115	0,109
-0,097	-0,098	-0,097	-0,089	-0,050	0,050	0,089	0,097	0,098	0,097
-0,085	-0,082	-0,074	-0,057	-0,024	0,024	0,057	0,074	0,082	0,085
-0,075	-0,070	-0,060	-0,042	-0,016	0,016	0,042	0,060	0,070	0,075
-0,070	-0,065	-0,054	-0,036	-0,013	0,013	0,036	0,054	0,065	0,070



R=33857485225891 / 67079777360749 ~ 0.50473460941601660941

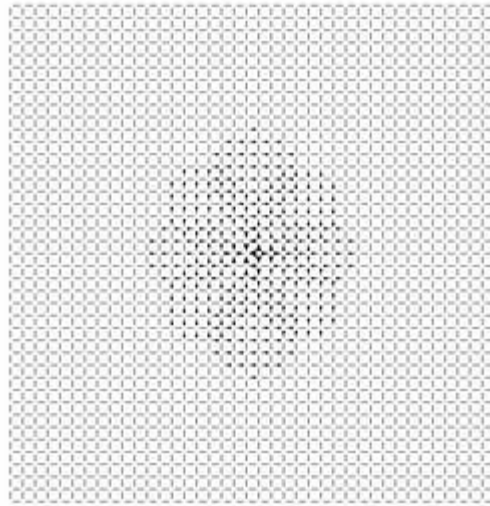
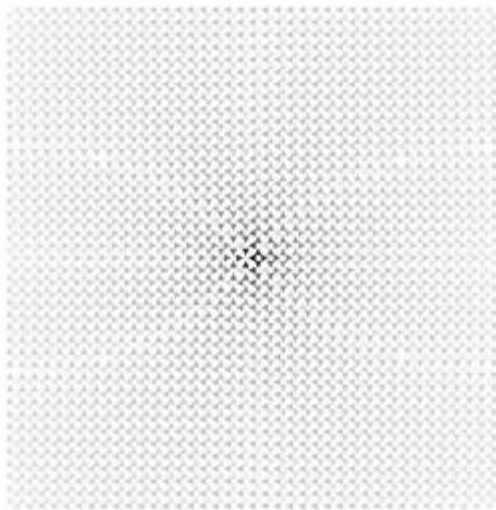
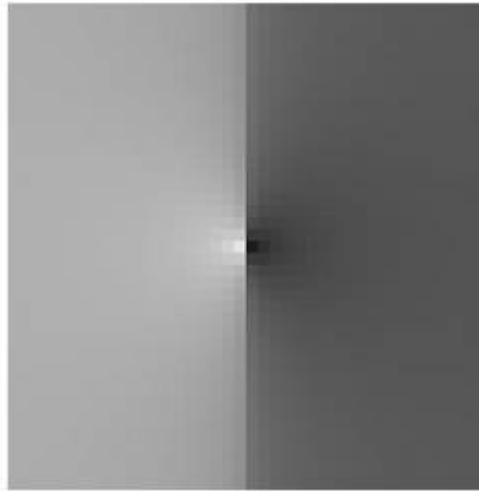
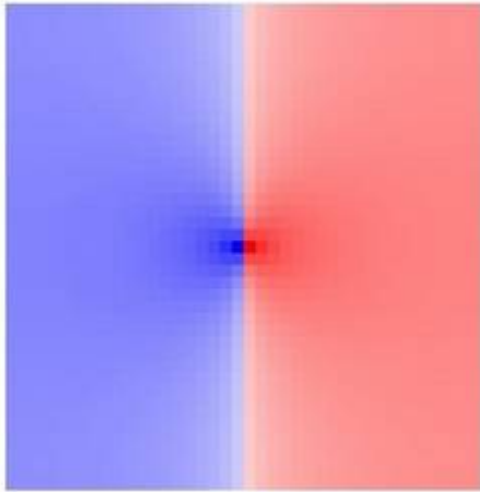
2. Beispiel: 21x20-Gitter

```
-0,038 -0,037 -0,036 -0,034 -0,031 -0,027 -0,022 -0,016 -0,010 -0,003 0,003 0,010 0,016 0,022 0,027 0,031 0,034 0,036 0,037 0,038
-0,039 -0,038 -0,037 -0,034 -0,031 -0,028 -0,023 -0,017 -0,010 -0,003 0,003 0,010 0,017 0,023 0,028 0,031 0,034 0,037 0,038 0,039
-0,040 -0,039 -0,038 -0,036 -0,033 -0,030 -0,025 -0,019 -0,011 -0,004 0,004 0,011 0,019 0,025 0,030 0,033 0,036 0,038 0,039 0,040
-0,042 -0,041 -0,040 -0,039 -0,036 -0,032 -0,028 -0,021 -0,013 -0,004 0,004 0,013 0,021 0,028 0,032 0,036 0,039 0,040 0,041 0,042
-0,044 -0,044 -0,043 -0,042 -0,040 -0,037 -0,032 -0,025 -0,016 -0,005 0,005 0,016 0,025 0,032 0,037 0,040 0,042 0,043 0,044 0,044
-0,047 -0,047 -0,047 -0,046 -0,045 -0,042 -0,038 -0,032 -0,022 -0,008 0,008 0,022 0,032 0,038 0,042 0,045 0,046 0,047 0,047 0,047
-0,050 -0,050 -0,050 -0,051 -0,051 -0,050 -0,048 -0,042 -0,030 -0,012 0,012 0,030 0,042 0,048 0,050 0,051 0,051 0,050 0,050 0,050
-0,053 -0,053 -0,054 -0,056 -0,057 -0,059 -0,060 -0,057 -0,047 -0,021 0,021 0,047 0,057 0,060 0,059 0,057 0,056 0,054 0,053 0,053
-0,055 -0,056 -0,058 -0,060 -0,064 -0,069 -0,076 -0,081 -0,079 -0,047 0,047 0,079 0,081 0,076 0,069 0,064 0,060 0,058 0,056 0,055
-0,057 -0,058 -0,060 -0,064 -0,069 -0,078 -0,092 -0,113 -0,140 -0,137 0,137 0,140 0,113 0,092 0,078 0,069 0,064 0,060 0,058 0,057
-0,057 -0,058 -0,061 -0,065 -0,072 -0,082 -0,101 -0,139 -0,229 -0,500 0,500 0,229 0,139 0,101 0,082 0,072 0,065 0,061 0,058 0,057
-0,057 -0,058 -0,060 -0,064 -0,069 -0,078 -0,092 -0,113 -0,140 -0,137 0,137 0,140 0,113 0,092 0,078 0,069 0,064 0,060 0,058 0,057
-0,055 -0,056 -0,058 -0,060 -0,064 -0,069 -0,076 -0,081 -0,079 -0,047 0,047 0,079 0,081 0,076 0,069 0,064 0,060 0,058 0,056 0,055
-0,053 -0,053 -0,054 -0,056 -0,057 -0,059 -0,060 -0,057 -0,047 -0,021 0,021 0,047 0,057 0,060 0,059 0,057 0,056 0,054 0,053 0,053
-0,050 -0,050 -0,050 -0,051 -0,051 -0,050 -0,048 -0,042 -0,030 -0,012 0,012 0,030 0,042 0,048 0,050 0,051 0,051 0,050 0,050 0,050
-0,047 -0,047 -0,047 -0,046 -0,045 -0,042 -0,038 -0,032 -0,022 -0,008 0,008 0,022 0,032 0,038 0,042 0,045 0,046 0,047 0,047 0,047
-0,044 -0,044 -0,043 -0,042 -0,040 -0,037 -0,032 -0,025 -0,016 -0,005 0,005 0,016 0,025 0,032 0,037 0,040 0,042 0,043 0,044 0,044
-0,042 -0,041 -0,040 -0,039 -0,036 -0,032 -0,028 -0,021 -0,013 -0,004 0,004 0,013 0,021 0,028 0,032 0,036 0,039 0,040 0,041 0,042
-0,040 -0,039 -0,038 -0,036 -0,033 -0,030 -0,025 -0,019 -0,011 -0,004 0,004 0,011 0,019 0,025 0,030 0,033 0,036 0,038 0,039 0,040
-0,039 -0,038 -0,037 -0,034 -0,031 -0,028 -0,023 -0,017 -0,010 -0,003 0,003 0,010 0,017 0,023 0,028 0,031 0,034 0,037 0,038 0,039
-0,038 -0,037 -0,036 -0,034 -0,031 -0,027 -0,022 -0,016 -0,010 -0,003 0,003 0,010 0,016 0,022 0,027 0,031 0,034 0,036 0,037 0,038
```



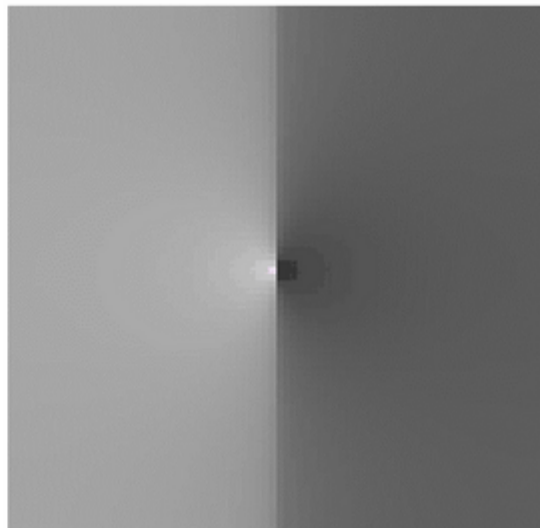
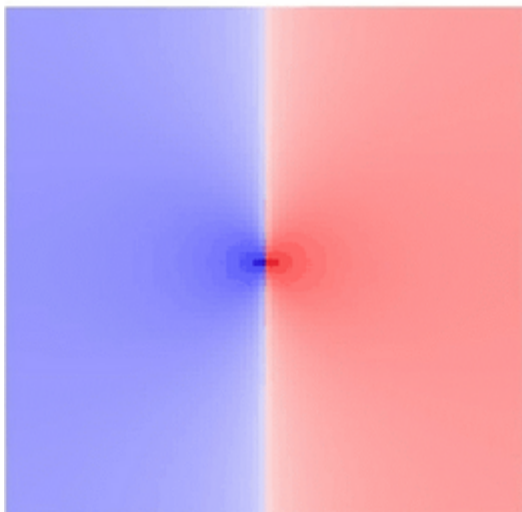
R ~ 0.50126329575584726441

3. Beispiel: 41x40-Gitter



$R \sim 0.50032804756513773525$

4. Beispiel: Potentialgefälle im 77x78-Gitter



R ~ 0.50009198457057738805

Literatur

[1] „Doppel- und Tripel-Leiter in unendlichen Gittern“, Arnold Schönhage, e-mail Dez 2008 an Gert Regenspurg .

[2] „Unendliche Gitter“, Wikipedia 2011, Surf im Internet findet:

Unendliches Gitter [[Bearbeiten](#)]⁰

Elektrischer Widerstand von $R_{1,0} = 0,5 \text{ Ohm}$ bis $R_{20,20} = 1,57861 \text{ Ohm}$

Der Widerstand zwischen zwei Knoten in einem unendlichen zweidimensionalen Gitter mit verbundenen Widerständen von jeweils 1 Ohm, wenn die Knoten in einer Richtung m Schritte voneinander entfernt sind und in der anderen Richtung n Schritte, berechnet sich als:

$$R_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{m+n} \left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{|m-n|}}{t} dt$$

Der Widerstand zwischen zwei unmittelbar benachbarten Knoten $R_{1,0}$ beträgt also

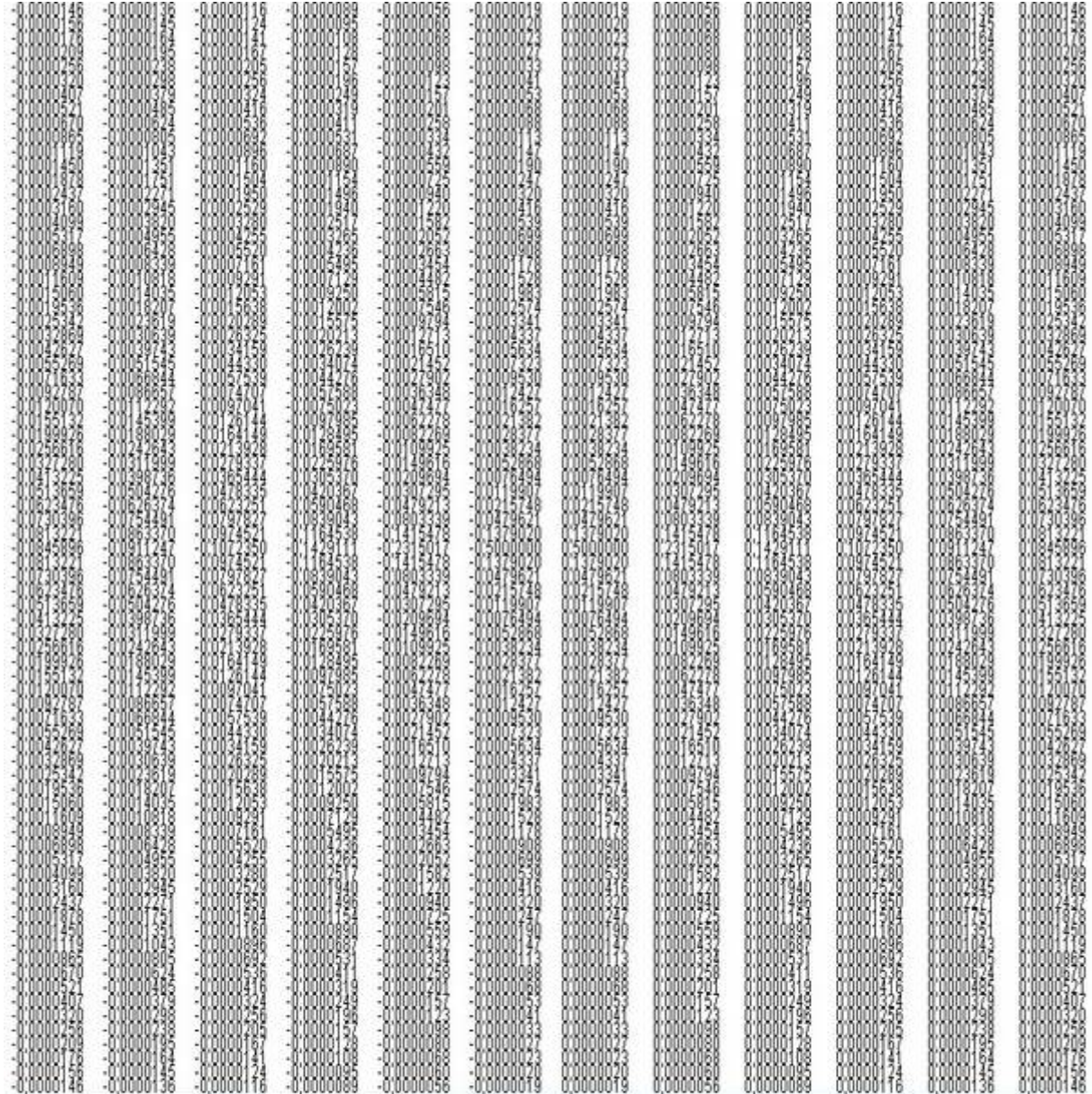
0,5 Ohm, der Widerstand $R_{2,0}$ 0,72676 Ohm (d. h. $\frac{2}{\pi}$), der Widerstand $R_{3,0}$ beträgt 0,860563 Ohm ($\frac{17}{2} - \frac{24}{\pi}$) und der Widerstand $R_{1,1}$ ist 0,63662 Ohm ($2 - \frac{4}{\pi}$).

Hinweis

Durch Surf im Internet mit den Suchwörtern „Unendliches Gitter“, „endliches Gitter“ Findet man zahlreiche Artikel über den Widerstand zwischen Knoten in Gittern mit 1 Ohm Verbindungen zwischen den Knoten, Interessant scheinen Veröffentlichungen von Hans Neu zu sein, insbesondere die Arbeit: „Der elektrische Widerstand eines Drahtgitters“ .

Anhang

77x12-Pot , angegeben mit 7 Nachkommastellen
, Das Potentialpaar $(-1/2, +1/2)$ liegt am zentralen Knotenpaar



Graphiken zum 77x12-Geburtstag-Gitter
gemäß der Werte von 77x12-Pot (im Uhrzeigersinn horizontal gelegt)

