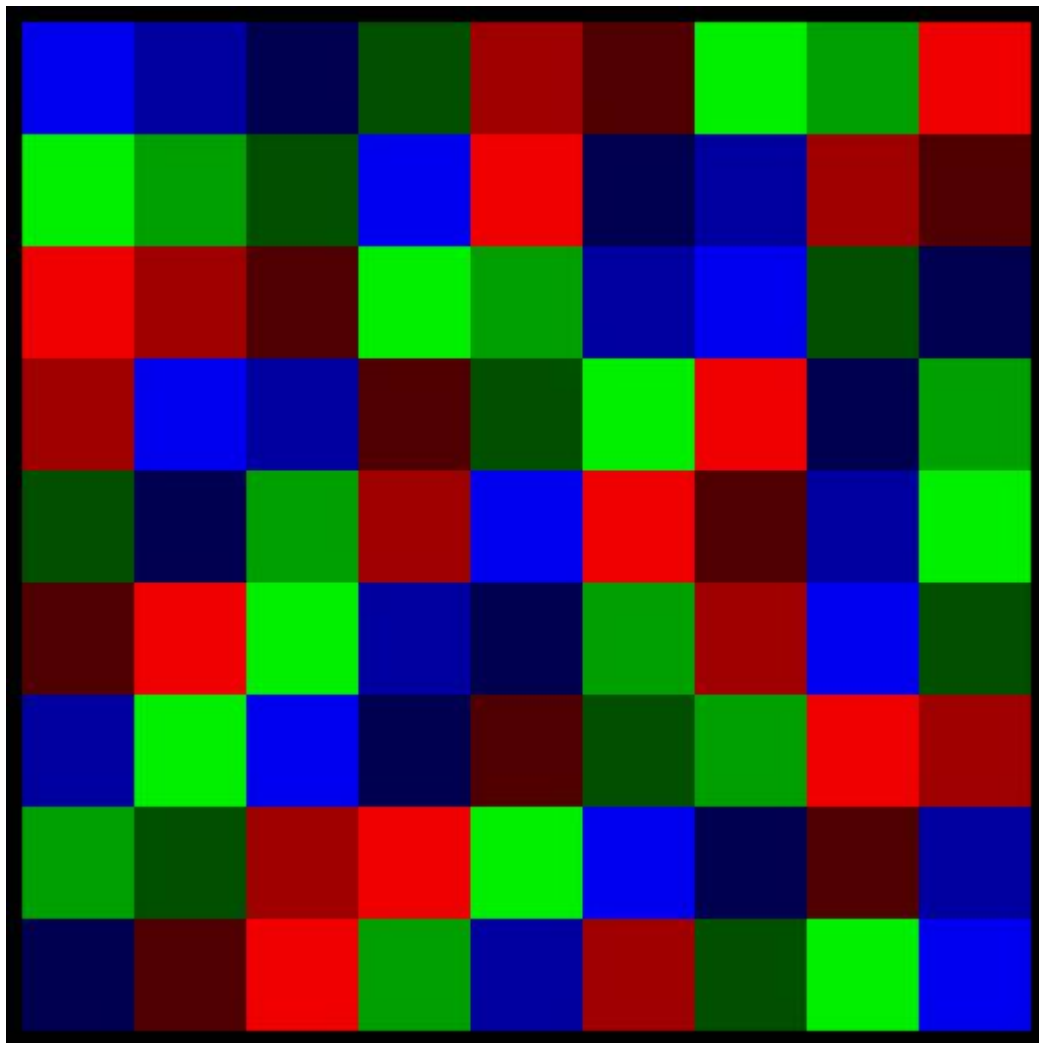


# Darstellung und Struktur der Spreizsudokus E27



## Darstellung und Struktur der Spreizsudokus E27

Fritz Ostermann September 2014  
www.f-ostermann.de

Ende Februar hat mir A. Schönhage 24 Spreizsudokus E27 in einem neuen Format –1-Regel genannt – mitgeteilt. Es lassen sich mit zwölf von ihnen, erzeugt aus den dbn-Sudokus  $G_1, G_2$  und  $N_i$ , ( $i=12, \dots, 23$ ) notiert, alle Spreizsudokus E27 darstellen. In naheliegender Weise ergibt sich aus der 1-Regel ein zum dbn-Format äquivalentes Format, hier unitäres Format genannt. Im Folgenden werden die 12 Spreizsudokus  $N_i$  neu sortiert und notiert, um strukturelle Zusammenhänge deutlicher sichtbar zu machen. Als Quelle der Strukturierung habe ich  $N_{16}$  in Verbindung mit  $N_{22}$  gewählt. Es sind Fixsudokus in Bezug auf Transponieren und Renormieren, und sie sind durch eine Sudoku-Transformation miteinander verbunden. Jedes Spreizsudokus E27 kann man somit als Transformationsbild von  $N_{16}$  oder von  $N_{22}$  sehen. Die Sudokus  $N_{16}, N_{22}$  haben Eigenschaften, aus denen sie sich leicht konstruieren lassen. Es wird dargelegt, wie die Eigenschaften dieser Sudokus sich auf deren Transformationssbilder übertragen. Mit den Eigenschaften ist für jedes der 48 unitären Spreizsudokus E27 durch eine „Hauptgruppe“  $H$  von Fixoperatoren aus der Mischgruppe  $M = Z \times G$  ein Signum gegeben. Es erlaubt, aus dem Normblock die übrigen acht Blöcke zu bestimmen und damit das Sudoku zu rekonstruieren. Schließlich zeigen die Konjunktionssbilder der Hauptgruppen, dass die Sudokus  $N_i$  nicht nur die neun Fixoperatoren der Hauptgruppe, sondern ein breites Feld von Fixoperatoren haben.

Im Fall der 1-Regel-Sudokus  $N_i$  ist die Hauptgruppe ein Verbund der Fixgruppe  $\langle (s,s,s)R, (r,r,r)S \rangle$  von  $U_3^{***}$  mit einer Blockoperatorenmatrix,  $\pi$ -Signatur genannt, deren Elemente sich aus Ziffernpermutationen der hauptdiagonalen bzw. antidiagonalen Dreier des Normblocks zusammensetzen. Mittels der  $\pi$ -Signatur erhält man damit das vorgelegte  $N_i$  als Bild von  $U_3^{***}$ . Es zeigt, wie sich die Partition der Dreiermengen von  $U_3^{***}$  in die Partition des betrachteten  $N_i$  zergliedert. Das lässt sich verallgemeinern auf die 48 unitären Spreizsudokus E27 unter Bezug auf die unitären Superfixe  $U_i^{***}$  ( $i=1,2,3,4$ ) und schließlich auf alle normierten Spreizsudokus E27. Eine Zergliederung der Partition von  $U_3^{***}$  zeigen auch 1-Regel-Sudokus, deren Hauptgruppe ein Verbund der Fixgruppe  $\langle (s,s,s)R, (r,r,r)S \rangle$  von  $U_3^{***}$  mit einer  $\pi$ -Signatur ist, deren Elemente sich aus Ziffernpermutationen der horizontalen bzw. vertikalen Dreier des Normblocks zusammensetzen. Dabei gibt es Mengen  $D_{27hor_{K1,uni}}, D_{27ver_{K1,uni}}$  mit jeweils 18 Mischgruppen-Superfixen, deren Partitionen extrem zergliedert sind, vergleichbar mit den Zergliederungen bei den  $N_i$ . Die betrachteten Konjunktionssbilder der Hauptgruppen von  $(I_0, J_0)$  alias  $(N_{16}, N_{22})$  sind jeweils die Hauptgruppen des Partners.

Bezug

Arnold Schönhage, Liste der nach der 1-Regel normierten extremen Spreizsudokus  
 $N_0$ - $N_{23}$ , 26. 02. 2014

Titelbild: „Spreizsudoku  $N_{16}$ “ von Hendrik Herrmann

# Gliederung

## I Darstellung

1-Regel und die Klasse $K_{1,uni,E27}$	Seite 3
Unitäres Format und die Menge $\Omega_{uni,E27}$	
Zusammenhang von $\Omega_{uni,E27}$ und $\Omega_{dbn,E27}$ mit $G_1, G_2$	
Blockwinkelnormiertes Sudoku	
Zusammenhang von $\Omega_{uni,E27}$ mit $G_i, G_i^+$ , $i=3, \dots, 8$	
Dbn-Leader und Bezirke im Zählalgorithmus	

## II Struktur

Zusammenhänge in $\Gamma_{K_{1,uni,E27}}$	Seite 8
Eigenschaften des Spreizsudokus $I_0 = N_{16}$ und seine Eindeutigkeit	
Eigenschaften der Sudokus aus $\Gamma_{K_{1,uni,E27}}$	
Eigenschaften der Sudokus aus $\Omega_{uni,E27}$	
Bemerkung zur Repräsentanz im dbn-Format	
Eigenschaften der Sudokus in den $T_{2 \times 3}$ -Bahnen von $\Omega_{uni,E27}$	

## III Hauptgruppen und Generation von Mischgruppen-Superfixen

Hauptgruppen der Sudokus aus $\Gamma_{K_{1,uni,E27}}$	Seite 17
Hauptgruppe der Bahnen $V_4(I_0)$ , $V_4(J_0)$ in Standardform	
Konjunktionbilder von Hauptgruppen unitärer Sudokus	Seite 18
Sudokus im 1-Regel-Umfeld von $N_i$ ( $i=12, \dots, 23$ )	Seite 20
Beispiele diverser 1-Regel- Mischgruppen-Superfixe	Seite 22
Generation der $N_i$ , ( $i=12, \dots, 23$ ) mittels $\pi(N_i)$ und $U_3^{***}$	Seite 27
Generation von $R_1 N_i$ , $S_1 N_i$ , $R_1 S_1 N_i$ mittels $U_2^{***}$ , $U_1^{***}$ , $U_4^{***}$	
$U_3^{***}$ -Signaturen für die Sudokus von D27hor $K_{1,uni}$	Seite 29
$U_3^{***}$ -Signaturen für die Sudokus von D27ver $K_{1,uni}$	Seite 31
Liste $N = \{N_i, i = 12, \dots, 23\}$	Seite 33
Liste $G = \{G_i, i = 1, \dots, 8\}$	Seite 34

## I Darstellung

### 1-Regel und die Klasse $K1,uni,E27$

Ein Sudoku ist gemäß der 1-Regel geformt genau dann, wenn es normiert ist und wenn die 1 in den Blöcken

in der 1. Blockzeile jeweils in der 1. Spalte oben, Mitte, unten steht  
in der 2. Blockzeile in jeweils der 2. Spalte oben, Mitte, unten steht  
in der 3. Blockzeile in jeweils der 3. Spalte oben, Mitte, unten steht.

Man sieht leicht, dass sich jedes normierte Sudoku anhand von Operatoren aus  $V_4 = \{id, R_1, S_1, R_1S_1\}$  lokalen normierungserhaltenden Operatoren, d.h. Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$ , ins 1-Format transformieren lässt. Die Menge der gemäß der 1-Regel geformten Spreizsudokus E27 notieren wir  $\Gamma_{K1,uni,E27}$ .

### Unitäres Format und die Menge $\Omega_{uni,E27,E27}$

Transformiert man diese Menge  $\Gamma_{K1,uni,E27}$  mittels  $R_1, S_1$  bzw.  $R_1S_1$ , erhält man die Mengen

$$\Gamma_{K2,uni,E27} = R_1\Gamma_{K1,uni,E27},$$

$$\Gamma_{K3,uni,E27} = S_1\Gamma_{K1,uni,E27},$$

$$\Gamma_{K4,uni,E27} = R_1S_1\Gamma_{K1,uni,E27},$$

Damit gesellen sich zu den Sudokus der 1-Regel die Typen  $K2,uni,E27, K3,uni,E27, K4,uni,E27$

Ein Sudoku ist vom Typ  $K2,uni,E27$  wenn es normiert ist und wenn die 1- abweichend von der 1-Regel - in den Blöcken

in der 2. Blockzeile jeweils in der 3. Spalte oben, Mitte, unten steht  
in der 3. Blockzeile jeweils in der 2. Spalte oben, Mitte, unten steht.

Ein Sudoku ist vom Typ  $K3,uni,E27$  wenn es normiert ist und wenn die 1 - abweichend von der 1-Regel - in den Blöcken

in der 1. Blockzeile in jeweils der 1. Spalte oben, unten, Mitte steht  
in der 2. Blockzeile in jeweils der 2. Spalte oben, unten, Mitte steht  
in der 3. Blockzeile in jeweils der 3. Spalte oben, unten, Mitte steht.

Ein Sudoku ist vom Typ  $K4,uni,E27$  wenn es normiert ist und wenn die 1 - abweichend von der 1-Regel - in den Blöcken

in der 1. Blockzeile in jeweils der 1. Spalte oben, unten, Mitte steht  
in der 2. Blockzeile in jeweils der 3. Spalte oben, Mitte, Mitte steht  
in der 3. Blockzeile in jeweils der 2. Spalte oben, unten, Mitte steht.

die Vereinigungsmenge  $\Omega_{\text{uni},E27} = \Gamma_{K1,\text{uni},E27} \cup \Gamma_{K2,\text{uni},E27} \cup \Gamma_{K3,\text{uni},E27} \cup \Gamma_{K4,\text{uni},E27}$  ist ein Repräsentantensystem von 48  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen mit einem unitären Sudoku als Leader.

Zusammen mit der 1-Regel ist mit den anhand von  $R, S_1, R_1S_1$  gewonnenen Typen ein neues Sudoku-Format zur Repräsentanz von  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen definiert. Wir nennen es hier **unitäres Format**.

Ein Sudoku hat ein unitäres Format, wenn folgendes gilt:

Es ist ein normiertes Sudoku. In den Blöcken jeder Blockzeile steht die Ziffer 1 in der gleichen Spalte und in den Blöcken jeder Blockspalte in gleicher Zeile.

### Zusammenhang von $\Omega_{\text{uni},E27}$ und $\Omega_{\text{dbn},E27}$ mit $G_1, G_2$

Jedes normierte Sudoku lässt sich in genau ein unitäres Sudoku als auch in ein dbn-Sudoku transformieren. Offenbar gibt es 48  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen mit einem unitären Leader. Ebenfalls 48 Leader für  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen hat A.Schönhage zur Erfassung aller normierten E27-Sudokus gezählt und damit gefunden, dass es 1296·48 normierte E27-Sudokus gibt. Jedes unitäre Sudoku ist ein normiertes Sudoku.

Man sieht leicht: jedes dbn-Sudoku lässt sich anhand von Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$  in ein unitäres Sudoku transformieren und umgekehrt jedes unitäre Sudoku in die dbn-Form bringen. Die Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  aller diagonalblocknormierten Spreizsudokus E27 ist damit äquivalent zur Menge  $\Omega_{\text{uni},E27}$  aller unitären Spreizsudokus E27. Einen Zusammenhang der dbn-Sudokus  $\{G_i, i=1, \dots, 8\}$  aus dem Zählalgorithmus mit den  $\{N_i, i=12, \dots, 23\}$  lässt sich den Gleichungen des Abschnitts „Zusammenhang von  $\Omega_{\text{uni},E27}$  mit  $G_i, G_i^+, i=3, \dots, 8$ “ entnehmen.

Bei der praktischen Durchführung der 48 Transformationen von einem Format ins andere ist es oft hilfreich, in einem Zwischenschritt ein blockwinkelnormiertes Sudoku zu realisieren.

### Blockwinkelnormiertes Sudoku

Wir nennen ein Sudoku blockwinkelnormiert, kurz bwn-Sudoku, wenn es normiert ist und in den Blöcken der oberen Blockzeile die Zeilen mit der Ziffer 1 und in den Blöcken der vorderen Blockspalte die Spalten mit der Ziffer 1 der Größe nach geordnet sind. Bei der Umrechnung ins unitäre Format kommen nur Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$  vor, deren Komponenten 1,  $r_1$  oder  $s_1$  sind. Abhängig von der Lage der 1 in dem Block des Winkels lassen sich die Klassen  $K1bwn, K2bwn, K3bwn, K4bwn$  definieren.

Die Teilmenge  $\Gamma_{K1,\text{uni},E27}$  von  $\Omega_{\text{uni},E27}$  kann man als Repräsentantensystem der Bahnen in Bezug auf das direkte Produkt der Gruppen  $T_{2 \times 3}$  und  $V_4$  ansehen. Man bekommt damit einen direkten Bezug der nach der 1-Regel geformten Sudokus zu allen normierten Spreizsudokus E27.

Entsprechendes lässt sich für die Sudokus der Klasse  $K1bwn$  sagen.

Unter Bezug auf die im Zählalgorithmus angegebenen dbn-Sudokus  $G_1, G_2$  gibt A.Schönhage 12 nach der 1-Regel geformte Spreizsudokus E27  $N_{12}, N_{13}, \dots, N_{23}$  an. Die Anzahl ist stimmig mit dem Zählergebnis aller Spreizsudokus E27.

Demnach ist  $\Gamma_{K1\text{uni}E27} = \{N_i, i = 12, \dots, 23\}$ .

Die Abhängigkeit der 12 Sudokus  $N_i$  von  $G_1, G_2$  ist implizit bestimmt durch die folgenden Gleichungen

<p>(1a)</p> $S_1N12 = (1, r_2, r_3)(1, s, ss)G_1$ $R_1S_1N13 = (1, r_2, r_3)(1, s_2, s_3)\pi_1(s_1, 1, 1)G_1$ $\pi_1 = (23)(56)(89)$ $R_1N14 = (1, r_2, r_3)(1, s_1, s_3)\pi_2(s_2, 1, 1)G_1$ $\pi_2 = (13)(46)(79)$ $N15 = (1, r_3, r_2)(1, s_2, s_1)\pi_3(s_3, 1, 1)G_1$ $\pi_3 = (12)(45)(78)$ $N16 = (1, r_2, r_3)(1, 1, ss)\pi_s(s, 1, 1)G_1$ $\pi_s = (123)(456)(789)$ $R_1N17 = (1, r_3, r_2)(1, s, s_2)\pi_{ss}(ss, 1, 1)G_1$ $\pi_{ss} = (132)(465)(798)$	<p>(1b)</p> $R_1N18 = (1, r_3, r_2)(1, ss, s)G_2$ $N19 = (1, r_3, r_2)(1, s_3, ss)\pi_1(s_1, 1, 1)G_2$ $R_1N20 = (1, r_2, r_3)(1, s_1, s_3)\pi_2(s_2, 1, 1)G_2$ $R_1S_1N21 = (1, 1, r_2)(1, s_1, s_2)\pi_3(s_3, 1, 1)G_2$ $N22 = (1, r_2, r_3)(1, 1, ss)\pi_s(s, 1, 1)G_2$ $S_1N23 = (1, r_2, r_3)(1, 1, s)\pi_{ss}(ss, 1, 1)G_2$
--	---

Die Mengen  $\Omega_{dbn, E27}$  und  $\Omega_{uni, E27}$  sind äquivalente Repräsentantensysteme im dbn-Format bzw. unitären Format für die 48  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen, deren Vereinigungsmenge alle normierten E27-Sudokus bestimmt. In jeder  $T_{2 \times 3}$ -Bahn liegt genau ein dbn-Repräsentant und ein unitärer Repräsentant. Zwischen diesen Repräsentanten besteht folgender Zusammenhang

<p>(2a)</p> $G_{1,0} = G_1 = (1, r_2, r_3)(1, ss, s)S_1N12$ $G_{1,1,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, s_2, s_3)R_1S_1N13$ $G_{1,2,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, s_1, s_3)R_1N14$ $G_{1,3,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s_2, s_1)N15$ $G_{1,4,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, 1, s)N16$ $G_{1,5,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, ss, 1)R_1N17$	$G^0_{1,0} = R_1S_1G_{1,0} = (1, r_3, r_2)(1, s, ss)R_1N12$ $G^0_{1,1,dbn} = R_1S_1G_{1,1,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s_3, s_2)N13$ $G^0_{1,1,dbn} = R_1S_1G_{1,2,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s_3, s_1)S_1N14$ $G^0_{1,3,dbn} = R_1S_1G_{1,3,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, s_1, s_2)R_1S_1N15$ $G^0_{1,4,dbn} = R_1S_1G_{1,4,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s, 1)R_1S_1N16$ $G^0_{1,5,dbn} = R_1S_1G_{1,5,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, 1, ss)S_1N17$
<p>(2b)</p> $G_{2,0} = G_2 = (1, r_3, r_2)(1, s, ss)R_1N18$ $G_{2,1,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s_3, s)N19$ $G_{2,2,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, s_1, s_3)R_1N20$ $G_{2,3,dbn} = (1, 1, r_2)(1, s_1, s_2)R_1S_1N21$ $G_{2,4,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, 1, s)N22$ $G_{2,5,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, 1, ss)S_1N23$	$G^0_{2,0} = R_1S_1G_{2,0} = (1, r_2, r_3)(1, ss, s)S_1N18$ $G^0_{2,1,dbn} = R_1S_1G_{2,1,dbn} = (1, r_2, r_3)(1, s, s_3)R_1S_1N19$ $G^0_{2,1,dbn} = R_1S_1G_{2,2,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s_3, s_1)S_1N20$ $G^0_{2,3,dbn} = R_1S_1G_{2,3,dbn} = (1, r_2, 1)(1, s_2, s_1)N21$ $G^0_{2,4,dbn} = R_1S_1G_{2,4,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, s, 1)R_1S_1N22$ $G^0_{2,5,dbn} = R_1S_1G_{2,5,dbn} = (1, r_3, r_2)(1, ss, 1)R_1N23.$

Zusammen mit den Sudokus  $G_{1,0} = G_1, G_{2,0} = G_2$ , ergibt sich die Menge

$$\Gamma^S_{dbn, E27} = \{G_{1,i,dbn}, G_{2,i,dbn}; i=0, \dots, 5\}$$

$\Gamma^S_{uni, E27}$  und  $\Gamma^S_{dbn, E27}$  sind äquivalente Repräsentantensysteme für 12  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen.

In den 48 Gleichungen zwischen Sudokus im dbn-Format und unitärem Format werden offensichtlich 48 verschiedene unitäre Sudokus geschrieben. Es sind die Sudokus der Menge  $N_i, R_1N_i, S_1N_i, R_1S_1N_i$  ( $i=12, \dots, 23$ ). Sie bilden die Menge  $\Omega_{uni, E27}$ . Durch den bijektiven

Zusammenhang sind auch 48 verschiedene dbn-Sudokus beschrieben. Sie bilden die Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$ .

Auf die Sudokus  $G_1, G_2$  sind die Sudokus  $G_{1,i}, G_{2,i}$  ( $i=1,\dots,5$ ) wie folgt bezogen. Es sind die Sudokus

$$\begin{array}{ll}
 (3a) & (3b) \\
 G_{1,1} = \pi_1(s_1,1,1) G_1 & G_{2,1} = \pi_1(s_1,1,1) G_2 \\
 & \pi_1 = (23)(56)(89) \\
 G_{1,2} = (1,r_3,r)(1,s_3,1)\pi_2(s_2,1,1) G_1 & G_{2,2} = (1,r_3,r)(1,s_3,1)\pi_2(s_2,1,1)G_2 \\
 & \pi_2 = (13)(46)(79) \\
 G_{1,3} = (1,r_1,r_1)(1,ss,s_3)\pi_3(s_3,1,1) G_1 & G_{2,3} = (1,r_1,r_1)(1,ss,s_3)\pi_3(s_3,1,1)G_2 \\
 & \pi_3 = (12)(45)(78) \\
 G_{1,4} = (1,r_3,r)(1,s_3,1)\pi_s(s,1,1) G_1 & G_{2,4} = (1,r_3,r_1)(1,s_3,1)\pi_s(s,1,1)G_2 \\
 & \pi_s = (123)(456)(789) \\
 G_{1,5} = (1,r_1,r_1)(1,ss,s_3)\pi_{ss}(ss,1,1) G_1 & G_{2,5} = (1,r_1,r_1)(1,ss,s_3)\pi_{ss}(ss,1,1)G_2 \\
 & \pi_{ss} = (132)(465)(798)
 \end{array}$$

### Zusammenhang von $\Omega_{\text{uni},E27}$ mit $G_i, G_i^+, i=3,\dots,8$

Für die dbn-Sudokus  $G_i$  und  $G_i^+ = (1,s_1,1)\pi_{RS} RSG_i$  ( $i=3,\dots,8$ ) hat man folgenden Zusammenhang mit unitären Sudokus:

$$\begin{array}{ll}
 (4a) & \\
 G_3 = (1,r,r_3)(1,s,s_3)S_1N22 & R_1S_1G_3 = G_3^0 = (1,r_3,r)(1,s_3,s)R_1N22 \\
 G_4 = (1,rr,r_2)(1,s_3,s)N17 & R_1S_1G_4 = G_4^0 = (1,r_2,rr)(1,s,s_3)R_1S_1N17, \\
 G_5 = (1,rr,r_2)(1,s_3,s)N23 & R_1S_1G_5 = G_5^0 = (1,r_2,rr)(1,s,s_3)R_1S_1N23 \\
 G_6 = (1,r,r_3)(1,s_2,ss)R_1S_1N12 & R_1S_1G_6 = G_6^0 = (1,r_3,r)(1,ss,s_2)N12, \\
 G_7 = (1,r,r_3)(1,s_2,ss)R_1S_1N18 & R_1S_1G_7 = G_7^0 = (1,r_3,r)(1,ss,s_2)N18, \\
 G_8 = (1,r_2,rr)(1,s_3,ss)R_1N16 & R_1S_1G_8 = G_8^0 = (1,rr,r_2)(1,ss,s_3)S_1N16, \\
 \\
 (4b) & \\
 G_3^+ = (1,r_3,r_2)(1,s_3,s_2)N14 & R_1S_1G_3^+ = G_3^{+0} = (1,r_2,r_3)(1,s_2,s_3)R_1S_1N14 \\
 G_4^+ = (1,r_2,r_3)(1,s_2,ss)S_1N19 & R_1S_1G_4^+ = G_4^{+0} = (1,r_3,r_2)(1,ss,s_2)R_1N19 \\
 G_5^+ = (1,r_2,r_3)(1,s_2,ss)S_1N13 & R_1S_1G_5^+ = G_5^{+0} = (1,r_3,r_2)(1,ss,s_2)R_1N13 \\
 G_6^+ = (1,r_2,r_3)(1,s_2,s_3)R_1N21 & R_1S_1G_6^+ = G_6^{+0} = (1,r_3,r_2)(1,s_3,s_2)S_1N21 \\
 G_7^+ = (1,r_3,r_2)(1,s,s_3)R_1N15 & R_1S_1G_7^+ = G_7^{+0} = (1,r_2,r_3)(1,s_3,s)S_1N15 \\
 G_8^+ = (1,r_3,r_2)(1,s_3,s)R_1S_1N20 & R_1S_1G_8^+ = G_8^{+0} = (1,r_2,r_3)(1,s,s_3)N20
 \end{array}$$

### Dbn-Leader und Bezirke im Zählalgorithmus

Es ist naheliegend anzunehmen, dass die Zählbereiche der dbn-Sudokus  $G_i$ , ( $i=3,\dots,8$ ) die Mengen  $\{G_i, G_i^0, G_i^+, G_i^{+0}\}$  sind. Ferner nehmen wir an, dass der Zählbereich von  $G_1$  die

analog aus den Sudokus  $G_{1,}, G_{1,4}, G_{1,5}$  und der Zählbereich von  $G_2$ , die analog aus den Sudokus  $G_2, G_{2,4}, G_{2,5}$  erzeugten Sudoku sind.

Wie demnach die Aufteilung von  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  in Zählbezirke zu denken ist, zeigt folgende Tabelle, notiert für die korrespondierenden Sudoku im unitären Format. Die Großbezirke von  $G_1, G_2$  sind dabei in je 3 Unterbezirke aufgeteilt.

In der Kopfzeile der Tabelle sind die aus dem Zählalgorithmus bekannten dbn-Sudoku genannt zusammen mit Hilfsleadern für Kleinbezirke in den Großbezirken. Zusammen bilden  $G^+_1, G^+_{1,4}, G^+_{1,5}, G^+_2, G^+_{2,4}, G^+_{2,5}$ , mit  $G_i, (i=3, \dots, 8)$  die Menge  $\Gamma^+_{\text{dbn},E27}$ , Die den Sudoku der Kopfzeile zugeordneten unitären Sudoku  $U$  sind in der 1. Zeile der Tabelle angegeben.

In den folgenden Zeilen sind die sich gemäß den Angaben der Kopfspalte ergebenden unitären Sudoku angegeben. Dabei ist  $U^+$  das Sudoku, das sich aus  $U$  durch Transformation mit RS, Renormierung und Formatierung ergibt.

Tab 1a

	$G_1$	$G_{1,x}$	$G_{1,y}$	$G_2$	$G_{2,x}$	$G_{2,y}$
$U$	$S_1N12$	$N16$	$R_1 N17$	$R_1N18$	$N22$	$S_1N23$
$R_1S_1U$	$R_1N12$	$R_1S_1N16$	$S_1 N17$	$S_1 N18$	$R_1S_1N22$	$R_1N23$
$U^+$	$N21$	$S_1N20$	$R_1S_1 N19$	$R_1S_1 N15$	$R_1N14$	$N13$
$R_1S_1U^+$	$R_1S_1N21$	$R_1N20$	$N19$	$N15$	$S_1N14$	$R_1S_1N13$
$G$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$
$U$	$S_1N22$	$N17$	$N23$	$R_1S_1N12$	$R_1S_1N18$	$R_1N16$
$R_1S_1U$	$R_1N22$	$R_1S_1N17$	$R_1S_1N23$	$N12$	$N18$	$S_1N16$
$U^+$	$N14$	$S_1N19$	$S_1N13$	$R_1 N21$	$R_1N15$	$R_1S_1N20$
$R_1S_1U^+$	$R_1S_1N14$	$R_1N19$	$R_1N13$	$S_1N21$	$S_1N15$	$N20$

Die unitären Sudoku der ersten beiden Zeilen sind mittels Operatoren aus  $V_4 = \{\text{id}, R_1, S_1, R_1S_1\}$  anhand von Sudoku aus  $L_0 = \{N12, N16, N17, N18, N22, N23\}$  gebildet und die Zeilen 3,4 entsprechend mit Sudoku aus  $L_1 = \{N21, N20, N19, N15, N14, N13\}$ .

Die Sudoku aus  $L_0$  sind Transformationsbilder von  $G_1, G_2$  bei deren Renormierung die geraden Spaltenpermutationen 1,s,ss auftreten und die Sudoku aus  $L_1$  sind Transformationsbilder bei deren Renormierung die ungeraden Spaltenpermutationen  $s_1, s_2, s_3$  vorkommen.

Die Sudoku der ersten drei Spalten sind offensichtlich paarweise überkreuz mit den Sudoku von  $G_6, G_8, G_4$  verbunden und die Sudoku der Spalten 4,5,6 sind paarweise überkreuz mit den Sudoku von  $G_7, G_3, G_5$  verbunden, jeweils mit unterschiedlichen Faktoren aus  $V_4$ .

Die Sudoku von  $L_0$  liegen auf den ersten sechs Plätzen der Zeile von  $U$  und die von  $L_1$  auf den ersten sechs Plätzen der Zeile von  $U^+$  und die 12 Sudoku sind offensichtlich verschieden.

Anhand der obigen Gleichungssysteme 2a, 2b, 4a kann man in der Kopfzeile von Tab1 die dbn-Sudoku  $G_1, G_{1,x}, G_{1,y}, G_2, G_{2,x}, G_{2,y}$  durch die Sudoku  $G_6^+, G_8^+, G_4^+, G_7^+, G_3^+, G_5^+$  ersetzen. Füllt man nun die freien Plätze der 3. und 4. Zeile mit den unitären Sudoku von  $R_1V, S_1V$ , ergibt sich Tabelle 1b.

Tab 1b

	$G_6^+$	$G_8^+$	$G_4^+$	$G_7^+$	$G_3^+$	$G_5^+$
$V$	$R_1N21$	$R_1S_1N20$	$S_1 N19$	$R_1N15$	$N14$	$S_1N13$
$R_1S_1V$	$S_1N21$	$N20$	$R_1N19$	$S_1N15$	$R_1S_1N14$	$R_1N13$
$R_1V$	$N21$	$S_1N20$	$R_1S_1 N19$	$N15$	$R_1N14$	$R_1S_1N13$
$S_1V$	$R_1S_1N21$	$R_1N20$	$N19$	$R_1S_1N15$	$S_1N14$	$N13$
$G$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$
$V$	$S_1N22$	$N17$	$N23$	$R_1S_1N12$	$R_1S_1N18$	$R_1N16$



$R_1S_1V$	$R_1N22$	$R_1S_1N17$	$R_1S_1N23$	$N12$	$N18$	$S_1N16$
$R_1V$	$R_1S_1N22$	$R_1N17$	$R_1N23$	$S_1N12$	$S_1N18$	$N16$
$S_1V$	$N22$	$S_1N17$	$S_1N13$	$R_1N12$	$R_1N18$	$R_1S_1N16$

Sind  $w_i^+$  die Formatierungsfaktoren der  $G_i^+$ , ( $i = 3, \dots, 8$ ) hat man mit  $\Gamma_{\text{dbn}, E27}^{++} = \{w_i^+ G_i^+, G_i^+; i=3, \dots, 8\}$  eine Basismenge. Aus ihr gewinnt man anhand der Operatoren aus  $V_4$  und jeweils passend gewählten lokalen Formatierungsfaktoren neu sortiert den Zusammenhang der Mengen  $\Omega_{\text{dbn}, E27}$  und  $\Omega_{\text{uni}, E27}$ .

## II Struktur

### Zusammenhänge in $\Gamma_{K1, \text{uni}, E27}$

Die Menge  $\Gamma_{K1, \text{uni}, E27}$  enthält alle gemäß der 1-Regel geformten E27-Sudokus. Ein Operator, der die 1-Regel respektiert, bildet somit  $\Gamma_{K1, \text{uni}, E27}$  auf sich ab. Operatoren dieser Art sind

(I)  $\alpha = \pi_T T$ ,  $T$  der Transformierer,  $\pi_T = (24)(37)(68)$  der Renormierer.

(II)  $\beta = \pi_Q Q$ ,  $Q = (r_1, r_1, r_1)(s_1, s_1, s_1)R_1S_1$ ,  $\pi_Q = (23)(47)(59)(68)$ .

Sie sind selbstinvers und sie kommutieren. Sie erzeugen somit eine Kleinsche Vierergruppe

$V^+ = \{\text{id}, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ ,  $\alpha = \pi_T T$ ,  $\beta = \pi_Q Q$ . Ihre Wirkung auf die Sudokus von  $\Gamma_{K1, \text{uni}, E27}$  zeigt Tabelle (1)

id	N12	N13	N14	N15	N16	N17	N18	N19	N20	N21	N22	N23
$\alpha$	N17	N19	N20	N21	N16	N12	N23	N13	N14	N15	N22	N18
$\beta$	N23	N21	N20	N19	N22	N18	N17	N15	N14	N13	N16	N12
$\alpha\beta$	N18	N15	N14	N13	N16	N23	N12	N21	N20	N19	N22	N17
$\beta\alpha$	N18	N15	N14	N13	N16	N23	N12	N21	N20	N19	N22	N17

Die Sudokus N16 und N22 sind ausgezeichnete Elemente, sie sind fix unter  $\pi_T T$ , und unter  $\pi_Q Q$  werden sie aufeinander abgebildet. Ausgezeichnet sind zudem N14, N20. Sie sind fix unter  $\alpha\beta$  und werden sowohl von  $\alpha$  als auch von  $\beta$  aufeinander abgebildet.

Man hat folgende Zusammenhänge, bezogen auf N16 bzw. N22:

$$\begin{array}{ll}
 \pi_1(s_1, s_1, s_1)R_1N16 = N14 & \pi_1(s_1, s_1, s_1)R_1N22 = N20 \\
 (1, rr, r)\pi_2(s_2, s_2, s_2)N16 = N15 & \pi_2(s_2, s_3, s_1)R_1S_1N22 = N21 \\
 \pi_3(s_3, s_1, s_2)R_1S_1N16 = N13 & (1, rr, r)\pi_3(s_3, s_3, s_3)N22 = N19 \\
 (1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1N16 = N17 & \pi_s(s, ss, 1)S_1N22 = N23 \\
 \pi_{ss}(ss, 1, s)S_1N16 = N12 & (1, r, rr)\pi_{ss}(ss, ss, ss)R_1N22 = N18
 \end{array}$$

Die Analogie der Zusammenhänge zeigt sich, wenn man setzt  $I_0 = N16$ ,  $J_0 = N22$

$I_0 = N16$ ,  $I_1 = N14$ ,  $I_2 = N15$ ,  $I_3 = N13$ ,  $I_4 = N17$ ,  $I_5 = N12$

$J_0 = N22$ ,  $J_1 = N20$ ,  $J_2 = N21$ ,  $J_3 = N19$ ,  $J_4 = N23$ ,  $J_5 = N18$

Tabelle (1) bekommt – umnotiert und umsortiert sowie reduziert – folgendes Gewicht durch Tabelle (2)

Id	$I_0$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$
$\alpha$	$I_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$I_5$	$I_4$	$J_0$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$J_5$	$J_4$

$\beta$	$J_0$	$J_1$	$J_3$	$J_2$	$J_5$	$J_4$	$I_0$	$I_1$	$I_3$	$I_2$	$I_5$	$I_4$
$\alpha\beta$	$J_0$	$I_1$	$I_3$	$I_2$	$J_4$	$J_5$	$I_0$	$J_1$	$J_3$	$J_2$	$I_4$	$I_5$

Vermöge  $N22 = \pi_Q QN16$  alias  $J_0 = \pi_Q QI_0$  hat man in  $\Gamma_{K1,uni,E27} = \{Ni, i=12, \dots, 23\} = \{I_i, J_i, i=0, \dots, 5\}$  eine Abhängigkeit allein von  $N16$  alias  $I_0$ . Analog lassen sich alle Sudokus in Abhängigkeit von  $N22$  schreiben.

### Eigenschaften des Spreizsudokus $I_0 = N16$ und seine Eindeutigkeit

Zur Beschreibung der Eigenschaften nehmen wir in jedem der 9 Blöcke neben den jeweils drei horizontalen und vertikalen Dreieren auch die jeweils drei hauptdiagonalen sowie antidiagonalen Dreier in den Blick. Beispielsweise sind es im Normblock die hauptdiagonalen Dreier  $\{1,5,9\}$ ,  $\{2,6,7\}$ ,  $\{3,4,8\}$  und die antidiagonalen Dreier  $\{1,6,8\}$ ,  $\{2,4,9\}$ ,  $\{3,5,7\}$ .

In jeder Richtung gibt es 3 Dreier. Wir fassen sie zu 4 Klassen zusammen: horizontale, vertikale, hauptdiagonale und antidiagonale Dreier.

Die 4 Klassen bilden das Dreiersystem eines Blocks. Lokale Blockoperatoren respektieren die Klassen, die zyklischen darunter auch alle Richtungen, Transpositionen hingegen nur die horizontalen und vertikalen Richtungen, die Diagonalen tauschen sie.

- (I) Das normierte Sudoku  $I_0$  hat eine hauptdiagonale Diagonaldreiergleichheit (hdDG). Die Klassen der hauptdiagonalen Dreier des Normblocks sind gleich der Klasse der hauptdiagonalen Dreier eines jeden Blocks.
- (II) Das Sudoku hat eine antidiagonal gen NO fortschreitende vertikal\horizontale Blockdreierstruktur (v\h-BDS). Es gibt beginnend in den Blöcken der ersten Blockspalte die Sequenzen

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{32} & b_{23} & b_{11} \\ b_{21} & b_{12} & b_{33} & b_{21} \\ b_{31} & b_{22} & b_{13} & b_{31} \end{matrix}$$

Die Klasse der horizontalen Dreier eines Blocks stimmen in jeder Sequenz überein mit der Klasse der vertikalen Dreier des vorangehenden Blocks.

- (III) Das Sudoku hat eine antidiagonal gen NO fortschreitende horizontal\antidiagonale Blockdreierstruktur (h\ad-BDS). In jeder der in (II) genannten Sequenz stimmt die Klasse der antidiagonalen Dreier eines Blocks überein mit der Klasse der horizontalen Dreier des vorangehenden Blocks.

- (IV) Das Sudoku hat den Fixoperator  $\alpha = \pi_T T$ . Zudem bleibt es fix unter den Operatoren  $\rho = \pi_R(s,s,s)R$  mit  $\pi_R = (384)$  und  $\sigma = \pi_S(r,r,r)S$  mit  $\pi_S = (276)$  und damit auch unter allen Operatoren der Gruppe  $H(I_0) = \langle \rho, \sigma \rangle = \{id, \rho, \sigma, \rho^2, \sigma^2, \rho\sigma, \rho\sigma^2, \rho^2\sigma, \rho^2\sigma^2\}$ ,

• wobei  $\rho^3 = 1, \sigma^3 = 1$  ist –.

Explizit hat man neben  $\rho, \sigma$  die Operatoren:

$$\rho^2 = (348)(ss,ss,ss)RR$$

$$\sigma^2 = (267)(rr,rr,rr)SS$$

$$\rho\sigma = (384)(276)(r,r,r)(s,s,s)RS$$

$$\rho\sigma^2 = (384)(267)(r,r,r)(ss,ss,ss)RSS$$

$$\rho^2\sigma = (348)(276)(rr,rr,rr)(s, s, s)RRS$$

$$\rho^2\sigma^2 = (348)(267)(rr,rr,rr)(ss,ss,ss)RRSS$$

Es ist  $H(I_0)$  die Hauptgruppe der Fixoperatoren von  $I_0$ , quasi ein Signum von  $I_0$ . Sie operiert transitiv und treu auf der Menge der 9 Blöcke von  $I_0$  und man kann somit anhand der 9 Operatoren das Sudoku  $I_0$  aus dem Normblock erzeugen.

Den Eigenschaft (I), (II), (III) entnimmt man: das Spreizsudoku  $I_0$  hat insgesamt  $27+3=30$  verschiedene Dreier mit der Verteilung  $3 \cdot 27 + 9 \cdot 3$  (hd oder ad) auf die 108 Plätze. Das Sudoku  $I_0$  -geformt nach der 1-Regel- ist durch die Eigenschaften (I), (II), (III) kanonisch bestimmt.

**Satz:**

$I_0$  ist das einzige nach der 1-Regel geformte Sudoku mit den Eigenschaften (I), (II), (III).

Beweis:

Das Sudoku  $I_0$  rekonstruiert sich anhand der 1-Regel(1-R), den Sudokubedingungen (SB) und den Eigenschaften (I), (II), (III) in folgenden Schritten

1. Man setzt  $b_{11}=e$  und setzt in den übrigen Blöcken die Ziffer 1 gemäß der (1-R)
2. Man setzt die Ziffern 5, 9 gemäß der Eigenschaft (I) und (SB) zunächst in die Blöcke  $b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{31}$  und danach in die restlichen Blöcke ein.
3. Man notiert -ausgehend vom Normblock e- in die leeren Felder des Südblocks  $b_{32}$  die nach (II) jeweils möglichen 2 Ziffern und danach wird die nach (II)+(III) korrekte Ziffer ausgewählt.
4. Analog zu Schritt 3 – ausgehend vom Südblock – füllt man den Ostblock  $b_{23}$ .
5. Mittels der SB füllt man den Mittelblock zweideutig auf und anhand der Eigenschaft II den NO-Block eindeutig. Damit können dann der SW-Block eindeutig und schließlich der Mittelblock eindeutig aufgefüllt werden. Die restlichen Felder werden nach SB-be Bedingungen gefüllt.

Auch anhand der Operatoren von  $H(I_0)$  ist  $I_0$  rekonstruierbar. Als Bild des Normblocks e hat man  $b_{21}=(384)se$ ,  $b_{31}=(348)sse$ ,  $b_{12}=(276)re$ ,  $b_{13}=(267)rre$ ,  $b_{22}=(276)(384)rse$ ,  $b_{23}=(267)(384)rrse$ ,  $b_{32}=(276)(348)rsse$ ,  $b_{33}=(267)(348)rrsse$ .

### **Eigenschaften der Sudokus aus $\Gamma_{K1,uni,E27}$**

Wir bestimmen die Eigenschaften des Sudoku  $J_0$  in seiner Abhängigkeit von  $I_0$  und die übrigen 10 Sudokus aus  $\Gamma_{K1,uni,E27}$  in ihrer Abhängigkeit von  $I_0$  bzw.  $J_0$

### **Eigenschaften des Spreizsudokus $J_0 = N22$**

Der Operator  $\beta = \pi_Q Q$  lässt in jedem Block die vier Dreierklassen invariant. Das Sudoku  $J_0$  hat damit wie  $I_0$  eine hauptdiagonale DDG. Zudem respektiert der Operator die Bindung der Blöcke in den Sequenzen, kehrt jedoch die Richtung der Sequenzen um.  $J_0$  hat damit eine gen SW gerichtete  $\vee h$ -DDS- Struktur sowie eine nach SW gerichtete  $h \wedge d$ - BDS-Struktur. Es gibt beginnend in den Blöcken der ersten Blockspalte die Sequenzen

$$\begin{array}{l} b_{11} \ b_{23} \ b_{32} \ b_{11} \\ b_{11} \ b_{33} \ b_{12} \ b_{21} \\ b_{31} \ b_{13} \ b_{22} \ b_{31} \end{array}$$

Das Sudoku hat den Fixoperator  $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$  wie  $I_0$ .

Zudem bleibt es fix unter den Operatoren der Hauptgruppe

$$H(J_0) = \langle (276)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle.$$

### **Eigenschaften der Sudokus I<sub>4</sub>, I<sub>5</sub>, J<sub>4</sub>, J<sub>5</sub>**

Die 4 Operatoren  $(1,r,rr)\pi_s(s,s,s)R_1$ ,  $\pi_{ss}(ss,s,1)S_1$ ,  $\pi_s(s,ss,1)$ ,  $(1,r,rr)\pi_{ss}(ss,ss,ss)$  lassen in jedem Block die vier Dreierklassen invariant, die ersten beiden Operatoren ändern jedoch die Richtung der Blockdreiersequenzen. Die 4 Sudokus I<sub>4</sub>, I<sub>5</sub>, J<sub>4</sub>, J<sub>5</sub> haben damit eine hauptdiagonale DDG wie I<sub>0</sub> und J<sub>0</sub>. Zudem haben J<sub>4</sub>, J<sub>5</sub> antidiagonal nach SW gerichtete BDS-Strukturen wie J<sub>0</sub> und es hat I<sub>4</sub> eine hauptdiagonal nach SO gerichtete BDS-Struktur und I<sub>5</sub> eine nach NW gerichtete BDS-Struktur.

Die Hauptgruppen von Fixoperatoren für die Sudokus I<sub>4</sub>, I<sub>5</sub>, J<sub>4</sub>, J<sub>5</sub> sind

$$H(I_4) = \langle (276)(384)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(I_5) = \langle (276)(s,s,s)R, (276)(384)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(J_4) = \langle (384)(s,s,s)R, (276)(384)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(J_5) = \langle (276)(384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle$$

Weitere Fixoperatoren ergeben sich aus dem Fixoperator  $\alpha = \pi_T T$  von I<sub>0</sub> und J<sub>0</sub> in bekannter Weise:

Ist  $\chi$  der Transformationsoperator, so ist  $\alpha' = \chi\alpha\chi^{-1}$  der Fixoperator des Bildes.

### **Eigenschaften der Sudokus I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub>, J<sub>3</sub>**

Die 6 Operatoren  $\pi_1(s_1,s_1,s_1)R_1$ ,  $(1,rr,r)\pi_2(s_2,s_2,s_2)$ ,  $\pi_3(s_3,s_1,s_2)R_1S_1$ ,  $\pi_1(s_1,s_1,s_1)R_1$ ,  $\pi_2(s_2,s_3,s_1)S_1$ ,  $(1,rr,r)\pi_3(s_3,s_3,s_3)$  lassen in jedem Block die Klasse der horizontalen Dreier als auch vertikalen Dreier invariant. Sie tauschen jedoch die Ausrichtung der Diagonaldreier in jedem Block. Die Sudokus I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub>, J<sub>3</sub> haben damit eine antidiagonale DDG. Zu dem haben sie abhängig von den globalen Faktoren R<sub>1</sub>, S<sub>1</sub>, R<sub>1</sub>S<sub>1</sub> unterschiedlich gerichtete v\h-BDS-Strukturen und analog unterschiedlich gerichtete h\hd-BDS-Strukturen.

Die Hauptgruppen von Fixoperatoren für die Sudokus sind

$$H(I_1) = \langle (249)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(I_2) = \langle (249)(357)(s,s,s)R, (294)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(I_3) = \langle (357)(s,s,s)R, (294)(375)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(J_1) = \langle (357)(s,s,s)R, (294)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(J_2) = \langle (249)(s,s,s)R, (294)(375)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(J_3) = \langle (294)(357)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle$$

Es hat

I<sub>1</sub> eine nach SO gerichtete BDSS,

I<sub>2</sub> eine nach NO gerichtete BDSS,

I<sub>3</sub> eine nach SW gerichtete BDSS,

J<sub>1</sub> eine nach NW gerichtete BDSS,

J<sub>2</sub> eine nach NO gerichtete BDSS,

J<sub>3</sub> eine nach SW gerichtete BDSS.

Zusammengefasst hat man in  $\Gamma_{K1,uni,E27}$ , also -für die nach der 1-Regel geformten Sudokus- folgende Verteilung der Richtung der Blockdreiersequenzen:

NO I<sub>0</sub> I<sub>2</sub> J<sub>2</sub>

SW I<sub>3</sub> J<sub>0</sub> J<sub>3</sub>

SO I<sub>4</sub> J<sub>4</sub> I<sub>1</sub>

NW I<sub>5</sub> J<sub>1</sub> J<sub>5</sub>

Die Richtungen der BDS-Strukturen sind damit in  $\Gamma_{K1,uni,E27}$  gleichverteilt.

Dabei haben I<sub>0</sub>, I<sub>4</sub>, I<sub>5</sub>, J<sub>0</sub>, J<sub>4</sub>, J<sub>5</sub> eine hauptdiagonale DDG-Struktur und damit verbunden eine h\ad BDS-Struktur und es haben

I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>, J<sub>1</sub>, J<sub>2</sub>, J<sub>3</sub> eine antidiagonale DDG-Struktur und damit verbunden eine h\hd-BDS-Struktur.

### Eigenschaften der Sudokus aus $\Omega_{uni,E27}$

Bei Transformation eines Sudokus aus  $\Gamma_{K1,uni,E27}$  durch die Operatoren R<sub>1</sub>, S<sub>1</sub>, R<sub>1</sub>S<sub>1</sub> werden die Strukturen des Sudokus respektiert.

Es ändern sich die Fixgruppen H in folgender Weise

$$H(I_0) = \langle (384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(R_1 I_0) = \langle (384)(s,s,s)RR, (276)(r,r,r)S \rangle$$

$$H(S_1 I_0) = \langle (384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)SS \rangle$$

$$H(R_1 S_1 I_0) = \langle (384)(s,s,s)RR, (276)(r,r,r)SS \rangle$$

Entsprechendes gilt für die Hauptgruppen H eines jeden Sudokus aus  $\Omega_{uni,E27}$ . Man hat damit eine Kennzeichnung für jedes Sudoku aus  $\Omega_{uni,E27}$  durch die Hauptgruppe H der Fixoperatoren.

Analoges kennt man bei den – auf der homepage im Skript „Sudoku-Ornamente“ – angegebenen unitären Superfixen U<sub>i</sub>\*\*\* (i=1,2,3,4). Deren Fixgruppen sind

$$F(U_3^{***}) = \langle (s,s,s)R, (r,r,r)S \rangle$$

$$F(U_2^{***}) = \langle (s,s,s)RR, (r,r,r)S \rangle$$

$$F(U_1^{***}) = \langle (s,s,s)R, (r,r,r)SS \rangle$$

$$F(U_4^{***}) = \langle (s,s,s)RR, (r,r,r)SS \rangle$$

Zudem sind U<sub>3</sub>\*\*\*, U<sub>4</sub>\*\*\* fix unter dem Operator  $\pi_T$  (T Transposition,  $\pi_T = (24)(37)(68)$ )

Es ändern sich auch die Richtungen der Blocksequenzen im Sudoku.

Eine gen NO, SW, SO, NW gerichtete BDS wechselt beim Operator R<sub>1</sub> nach SW, NW, NO, SO.

Eine gen NO, SW, SO, NW gerichtete BDS wechselt beim Operator S<sub>1</sub> nach NW, SO, SW, NO.

Eine gen NO, SW, SO, NW gerichtete BDS wechselt beim Operator R<sub>1</sub>S<sub>1</sub> nach SW, NO, NW, SO.

In jeder V<sub>4</sub>-Bahn eines Sudokus kommen alle 4 Richtungen vor. Da es in der Menge  $\Gamma_{K1,uni,E27}$  zu jeder Richtung 3 Sudokus gibt, sind die Richtungen in  $\Omega_{uni,E27}$  gleichverteilt, d.h.

die Menge  $\Omega_{uni,E27}$  zerfällt in vier Klassen gleicher Richtung der Blockdreiersequenzen.

Die NO-Klasse ist die Vereinigung der Mengen {I<sub>0</sub>, I<sub>2</sub>, J<sub>2</sub>}, R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>{I<sub>3</sub>, J<sub>0</sub>, J<sub>3</sub>}, R<sub>1</sub>{I<sub>4</sub>, J<sub>4</sub>, I<sub>1</sub>}, S<sub>1</sub>{I<sub>5</sub>, J<sub>1</sub>, J<sub>5</sub>}.

Die SW-Klasse ist die Vereinigung der Mengen R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>{I<sub>0</sub>, I<sub>2</sub>, J<sub>2</sub>}, {I<sub>3</sub>, J<sub>0</sub>, J<sub>3</sub>}, S<sub>1</sub>{I<sub>4</sub>, J<sub>4</sub>, I<sub>1</sub>}, R<sub>1</sub>{I<sub>5</sub>, J<sub>1</sub>, J<sub>5</sub>}.

Die SO-Klasse ist die Vereinigung der Mengen R<sub>1</sub>{I<sub>0</sub>, I<sub>2</sub>, J<sub>2</sub>}, S<sub>1</sub>{I<sub>5</sub>, J<sub>0</sub>, J<sub>3</sub>}, {I<sub>4</sub>, J<sub>4</sub>, I<sub>1</sub>}, R<sub>1</sub>S<sub>1</sub>{I<sub>5</sub>, J<sub>1</sub>, J<sub>5</sub>}.

Die NW-Klasse ist die Vereinigung der Mengen  $S_1 \{I_0, I_2, J_2\}$ ,  $R_1 \{I_5, J_0, J_3\}$ ,  $R_1 S_1 \{I_4, J_4, I_1\}$ ,  $\{I_5, J_1, J_5\}$ .

Die Klassen zu den Richtungen SW, NW ergaben sich aus den Klassen NO, SO anhand des Operators  $R_1 S_1$ .

Zusammengefasst zeigt sich folgende Tabelle

Tab2

		N16	N17	N12	N22	N23	N18
		$I_0$	$I_4$	$I_5$	$J_0$	$J_4$	$J_5$
Id	NO	$I_0$	$R_1 I_4$	$S_1 I_5$	$R_1 S_1 J_0$	$R_1 J_4$	$S_1 J_5$
$R_1 S_1$	SW	$R_1 S_1 I_0$	$S_1 I_4$	$R_1 I_5$	$J_0$	$S_1 J_4$	$R_1 J_5$
$R_1$	SO	$R_1 I_0$	$I_4$	$R_1 S_1 I_5$	$S_1 J_0$	$J_4$	$R_1 S_1 J_5$
$S_1$	NW	$S_1 I_0$	$R_1 S_1 I_4$	$I_5$	$R_1 J_0$	$R_1 S_1 J_4$	$J_5$
		N14	N15	N13	N20	N21	N19
		$I_1$	$I_2$	$I_3$	$J_1$	$J_2$	$J_3$
Id	NO	$R_1 I_1$	$I_2$	$I_3$	$S_1 J_1$	$J_2$	$R_1 S_1 J_3$
$R_1 S_1$	SW	$S_1 I_1$	$R_1 S_1 I_2$	$R_1 S_1 I_3$	$R_1 J_1$	$R_1 S_1 J_2$	$J_3$
$R_1$	SO	$I_1$	$R_1 I_2$	$R_1 I_3$	$R_1 S_1 J_1$	$R_1 J_2$	$S_1 J_3$
$S_1$	NW	$R_1 S_1 I_1$	$S_1 I_2$	$S_1 I_3$	$J_1$	$S_1 J_2$	$R_1 J_3$

Die Sudokus der ersten sechs Spalten haben eine hauptdiagonale DDG, die der hinteren sechs Spalten eine antidiagonale DDG. Zudem haben die Sudokus der ersten sechs Spalten eine hor\ad-BDS-Struktur und die der letzten sechs Spalten eine hor\hd-BDS-Struktur, wobei die Richtungen der Strukturen von der Zeile abhängen. Jedes Sudoku hat zudem eine ver\hor-BDS-Struktur mit der im Kopf der Zeile bestimmten Richtung.

### Bemerkung zur Repräsentanz im dbn-Format

Zu den dbn-Sudokus  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8$  und den Hilfsleadern  $G_{1,4}, G_{1,5}, G_{2,4}, G_{2,5}$  sind der Reihe nach äquivalent

$G_1 \sim S_1 I_5 = S_1 N12$	sowie	$G_{1,4} \sim I_0 = N16$
$G_2 \sim R_1 J_5 = R_1 N18$		$G_{1,5} \sim R_1 I_4 = R_1 N17$
$G_3 \sim S_1 J_0 = S_1 N22$		$G_{2,4} \sim J_5 = N22$
$G_4 \sim I_4 = N17$		$G_{2,5} \sim S_1 J_4 = S_1 N23$
$G_5 \sim J_4 = N23$		
$G_6 \sim R_1 S_1 J_5 = R_1 S_1 N12$		
$G_7 \sim R_1 S_1 J_5 = R_1 S_1 N18$		
$G_8 \sim R_1 I_0 = R_1 N16$		

Die Positionen der zu den unitären Sudokus von Tabelle 2 äquivalenten dbn-Sudokus des Zählalgorithmus zeigt Tabelle 2a

Tab2a	N12	N17	N12	N22	N23	N18	N14	N15	N13	N20	N21	N19
	I <sub>0</sub>	I <sub>4</sub>	I <sub>5</sub>	J <sub>0</sub>	J <sub>4</sub>	J <sub>5</sub>	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	I <sub>3</sub>	J <sub>1</sub>	J <sub>2</sub>	J <sub>3</sub>
NO	G <sub>1,4</sub>	G <sub>1,5</sub>	G <sub>1</sub>	*	*	*	G <sub>1,2</sub>	G <sub>1,3</sub>	G <sub>1,1</sub>	G <sub>1,4</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>1,5</sub>
SW	*	*	*	G <sub>2,4</sub>	G <sub>2,5</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>2,4</sub>	G <sub>2</sub>	G <sub>2,5</sub>	G <sub>2,2</sub>	G <sub>2,3</sub>	G <sub>2,1</sub>
SO	G <sub>8</sub>	G <sub>4</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>3</sub>	G <sub>7</sub>	G <sub>5</sub>	G <sub>8</sub>	G <sub>6</sub>	G <sub>4</sub>
NW	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Die Sudokus auf den Plätzen 1,2,3,7,8,9 der Zeile 1 zusammen mit den Sudokus auf den Plätzen 4,5,6,10,11,12 der Zeile 2 bilden die Menge  $\Gamma_{\text{dbn},E27}^S$ .

Die Sudokus auf den Plätzen 10,11,12 der Zeile 1 und auf den Plätzen 7,8,9 der Zeile 2 zusammen mit den 6 Sudokus der dritten Zeile bilden die Basis  $\Gamma_{\text{dbn},E27}^+$ .

Die 12 Sudokus der dritten Zeile bilden die Basis  $\Gamma_{\text{dbn},E27}^{++}$ .

Anhand der Operatoren von V4 kann jede der Basen  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  erzeugen. Mit den 12 Sudokus in den ersten 6 Spalten ist offenbar eine solche Basis nicht gegeben.

### Eigenschaften der Sudokus in den $T_{2 \times 3}$ -Bahnen von $\Omega_{\text{uni},E27}$

Die Eigenschaften der 36·36 Sudokus einer Bahn bestimmen sich aus den Eigenschaften des Leaders A aus  $\Omega_{\text{uni},E27}$  und den Transformationseigenschaften des Operators  $w = uv = (1, u_2, u_3)(1, v_2, v_3)$  aus  $T_{2 \times 3}$ . Wenn die Zeilenoperatoren  $u_2, u_3$  sowie die Spaltenoperatoren  $v_2, v_3$  die Identität oder zyklisch sind, bleiben die Eigenschaften (I), (II), (III) des Leaders erhalten. In jeder Bahn gibt es davon 81 Sudokus mit solchen Faktoren. Wenn in  $w$  eine Transposition vorkommt, hat das Transformationsbild  $A' = wA$  nicht mehr eine richtungshomogene DDG und damit verbunden eine in den Richtungen der Diagonalklassen homogene BDS-Struktur. Für mindestens einen der 9 Blöcke von A wird die Richtung der Diagonalklasse durch den Operator  $w$  verändert.  $A'$  hat eine inhomogene Blockdreiergleichheit, d.h. die in den 9 Blöcken übereinstimmenden Klassen gleicher Dreier sind nicht alle hauptdiagonal oder antidiagonal gerichtet. Demzufolge gibt es in  $A'$  keine homogene  $h \setminus ad$ -BDS-Struktur oder  $h \setminus hd$ -BDS-Struktur.  $A'$  hat eine inhomogene  $h \setminus d$ -BDS-Struktur. Beispiele dafür sind die Sudokus  $G_1, G_2$  sowie auch alle anderen Sudokus im dbn-Format als auch im bwn-Format. Hingegen zeigt sich hier das von A. Schönhage auf die Einträge gegründete uni-Format als kanonische Darstellungsform. Die 48 Sudokus im uni-Format haben alle eine -abhängig vom Leader- homogene  $h \setminus ad$ -BDS-Struktur oder eine homogene  $h \setminus hd$ -BDS-Struktur. Für 24 Leader ist sie antidiagonal und die anderen 24 sind hauptdiagonal. In jeder  $T_{2 \times 3}$ -Bahn dieser Sudokus liegen 81 Sudokus mit homogener  $h \setminus ad$ -BDS-Struktur oder  $h \setminus hd$ -BDS-Struktur. Damit gibt es 1215 Sudokus in jeder Bahn mit inhomogener DDG und entsprechend inhomogener  $h \setminus d$ -BDS-Struktur.

Die Transformationsweise von Fixoperatoren der Hauptgruppe eines Sudokus aus einer  $T_{2 \times 3}$ -Bahn mit einem unitären Leader zeigen wir an zwei Beispielen.

Beispiel 1:

$$G_1 = w \cdot S_1 I_5 \text{ mit } w = u \cdot v = (1, r_2, r_3)(1, ss, s), \quad (I_5 = N12).$$

$$H(S_1 I_5) = \langle (276)(s, s, s)R, (276)(384)(r, r, r)SS \rangle$$

Erzeugende Fixoperatoren von  $H(G_1)$  sind

$$\begin{aligned} \text{a) } w(276)(s, s, s)Rw^{-1} &= (1, r_2, r_3)(1, ss, s)(276)(s, s, s)R(1, r_2, r_3)(1, s, ss), \\ &= (276)(1, r_2, r_3)(1, ss, s)(s, s, s)(r_3, 1, r_2)(1, s, ss)R \\ &= (276)(r_3, r_2, rr)(s, s, s)R = \alpha_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } w(276)(384)(r, r, r)SSw^{-1} &= (1, r_2, r_3)(1, ss, s)(276)(384)(r, r, r)SS((1, r_2, r_3)(1, s, ss), \\ &= (276)(384)(1, r_2, r_3)(1, ss, s)(r, r, r)(1, r_2, r_3)(s, ss, 1)SS \\ &= (276)(384)(r, rr, rr)(s, s, s)SS = \beta_1. \end{aligned}$$

Es ist  $H(G_1) = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ .

Rekonstruktion von  $G_1$  anhand der Hauptgruppe von  $H(G_1)$ :

Das Bild des Normblocks unter  $\alpha_1$  ist der Block  $b_{21}$  und unter  $\alpha_1^2$  ist es der Block  $b_{31}$ .

Das Bild des Normblocks unter  $\beta_1$  ist der Block  $b_{13}$  und unter  $\beta_1^2$  ist es der Block  $b_{12}$ .

Das Bild des Normblocks unter  $\alpha_1 \beta_1^2$  ist der Mittelblock, u.s.w..

$$H(G_1) = \langle \alpha_1, \beta_1^2 \rangle$$

$$H(G_1) = \langle (276)(r_3, r_2, rr)(s, s, s)R, (267)(348)(rr, r, r)(ss, ss, ss)S \rangle$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1^2 &= (348)(r_3, r_2, rr)(r, rr, r)(s, s, s)(ss, ss, ss)RS \\ &= (348)(r_1, r_1, 1)RS \end{aligned}$$

Explizit regenerieren wir den Block  $b_{22}$

$$b_{22} = (348)r_1 e \quad b_{22} = (348)r_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad b_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 9 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$G_2 = w \cdot R_1 J_5 \text{ mit } w = u \cdot v = (1, r_3, r_2)(1, s, ss), \quad (J_5 = N18)$$

$$H(R_1 J_5) = \langle (276)(384)(s, s, s)RR, (276)(r, r, r)S \rangle.$$

Erzeugende Fixoperatoren von  $H(G_2)$  sind

$$\begin{aligned} \text{a) } w(276)(384)(s, s, s)RRw^{-1} &= (1, r_3, r_2)(1, s, ss)(276)(384)(s, s, s)RR((1, r_3, r_2)(1, ss, s), \\ &= (276)(384)(1, r_3, r_2)(1, s, ss)(s, s, s)(r_3, r_2, 1)(1, ss, s)RR \\ &= (276)(384)(r_3, rr, r_2)(s, s, s)RR = \alpha_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } w(276)(r, r, r)Sw^{-1} &= (1, r_3, r_2)(1, s, ss)(276)(r, r, r)S(1, r_3, r_2)(1, ss, s), \\ &= (276)(1, r_3, r_2)(1, s, ss)(r, r, r)(1, r_3, r_2)(s, 1, ss)S \\ &= (276)(r, rr, rr)(s, s, s)S = \beta_2. \end{aligned}$$

Es ist  $H(G_2) = \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$



Bilanz: Es gibt  $1296 \cdot 48$  normierte E27-Sudokus.

$81 \cdot 24$  haben eine homogene hauptdiagonale DDG und damit verbunden eine homogene  $h \backslash ad$ -BDS-Struktur.

$81 \cdot 24$  haben eine homogene antidiagonale DDG und damit verbunden eine homogene  $h \backslash hd$ - BDS-Struktur.

$1215 \cdot 48$  haben eine inhomogene DDG und damit verbunden eine inhomogene  $h \backslash d$ -BDS-Struktur.

In jedem der Fälle sind die Richtungen der BDS-Strukturen NO, SW, SO, NW gleichverteilt. Ziffernpermutationen der Sudokus respektieren alle Eigenschaften, geben ihnen lediglich ein anderes Gesicht.

## Hauptgruppen und Generation von Mischgruppen-Superfixen

### Hauptgruppen der Sudokus aus $\Gamma_{K1,uni,E27}$ .

$$\begin{aligned}
 H(I_0) &= \langle (384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle = H(N16) \\
 H(I_4) &= \langle (276)(384)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle = H(N17) \\
 H(I_5) &= \langle (276)(s,s,s)R, (276)(384)(r,r,r)S \rangle = H(N12) \\
 H(J_0) &= \langle (276)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle = H(N22) \\
 H(J_4) &= \langle (384)(s,s,s)R, (276)(384)(r,r,r)S \rangle = H(N23) \\
 H(J_5) &= \langle (276)(384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle = H(N18) \\
 H(I_1) &= \langle (249)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle = H(N14) \\
 H(I_2) &= \langle (249)(357)(s,s,s)R, (294)(r,r,r)S \rangle = H(N15) \\
 H(I_3) &= \langle (357)(s,s,s)R, (294)(375)(r,r,r)S \rangle = H(N13) \\
 H(J_1) &= \langle (357)(s,s,s)R, (294)(r,r,r)S \rangle = H(N20) \\
 H(J_2) &= \langle (249)(s,s,s)R, (294)(375)(r,r,r)S \rangle = H(N21) \\
 H(J_3) &= \langle (249)(357)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle = H(N19)
 \end{aligned}$$

In der Liste der Hauptgruppen hat man zwischen den Hauptgruppen  $H(I_0)$  und  $H(J_0)$  den Zusammenhang

$\chi H(I_0) \chi = H(J_0)$  wobei  $\chi = \pi_Q Q = (23)(47)(59)(68)(r_1, r_1, r_1)(s_1, s_1, s_1)R_1 S_1$ ,  
es ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned}
 \chi H(I_0) \chi &= \\
 &= \chi \langle (384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle \chi \\
 &= \langle (267)(ss,ss,ss)RR, (348)(rr,rr,rr)SS \rangle \\
 &= \langle (276)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle \quad \text{in Standardform} \\
 &= H(J_0)
 \end{aligned}$$

Hauptgruppe der Bahnen  $V_4(I_0)$ ,  $V_4(J_0)$  in Standardform ( $\langle \dots R, \dots S \rangle$ )

$$\begin{aligned}
 H(I_0) &= \langle (384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle \\
 H(R_1 I_0) &= \langle (348)(ss,ss,ss)R, (276)(r,r,r)S \rangle \\
 H(S_1 I_0) &= \langle (348)(s,s,s)R, (267)(rr,rr,rr)S \rangle \\
 H(R_1 S_1 I_0) &= \langle (348)(ss,ss,ss)R, (267)(rr,rr,rr)S \rangle \\
 H(J_0) &= \langle (276)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle \\
 H(R_1 J_0) &= \langle (267)(ss,ss,ss)R, (384)(r,r,r)S \rangle \\
 H(S_1 J_0) &= \langle (276)(s,s,s)R, (348)(rr,rr,rr)S \rangle \\
 H(R_1 S_1 J_0) &= \langle (267)(ss,ss,ss)R, (348)(rr,rr,rr)S \rangle
 \end{aligned}$$

Analog ergeben sich die Hauptgruppen der  $V_4$ -Bahnen eines jeden Sudokus aus  $\Omega_{uni,E2}$

## Konjunktionsbilder von Hauptgruppen unitärer Sudokus

Unitäre Sudokus haben neben den Operatoren der Hauptgruppe ein breites Feld weiterer Fixoperatoren. Die Konjunktionsbilder liefern Beispiele dafür.

Den Konjunktionsoperator beziehen wir aus dem Zusammenhang zweier Sudokus.

Wir wählen beispielsweise das Sudokupaar  $I_0, I_4$ . Es ist  $I_4 = \gamma I_0$  mit  $\gamma = (1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1$ .  
Deren Hauptgruppen sind

$$H(I_0) = \langle (384)(s, s, s)R, (276)(r, r, r)S \rangle$$

$$H(I_4) = \langle (276)(384)(s, s, s)R, (384)(r, r, r)S \rangle,$$

$$\text{kurz } H(I_0) = \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle, \quad H(I_4) = \langle \alpha_4, \beta_4 \rangle.$$

Das Konjunktionsbild  $H(I_4, I_0) = \gamma^{-1}H(I_4)\gamma$  nennen wir Fixnebengruppe von  $I_0$  über  $I_4$  und das Konjunktionsbild  $H(I_0, I_4) = \gamma H(I_4)\gamma^{-1}$  nennen wir Fixnebengruppe von  $I_4$  über  $I_0$ .  
Offenbar ist  $H(I_4, I_0)$  eine Menge von Fixoperatoren von  $I_0$  und  $H(I_0, I_4)$  eine Menge von Fixoperatoren von  $I_4$ .

Erzeugende Fixoperatoren von  $H(I_4, I_0)$  sind  $\alpha_{4,0} = \gamma^{-1}\alpha_4\gamma$  und  $\beta_{4,0} = \gamma^{-1}\beta_4\gamma$ .

Erzeugende Fixoperatoren von  $H(I_0, I_4)$  sind  $\alpha_{0,4} = \gamma\alpha_4\gamma^{-1}$  und  $\beta_{0,4} = \gamma\beta_4\gamma^{-1}$ .

Explizit hat man

a) Umformung von  $\alpha_{4,0}$ :

$$\alpha_{4,0} = \gamma^{-1}\alpha_4\gamma \quad \gamma = (1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1.$$

$$\alpha_{4,0} = R_1(ss, ss, ss)\pi_{ss}(1, rr, r)(276)(384)(s, s, s)R(1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1$$

$$\alpha_{4,0} = \pi_{ss}(276)(384)\pi_s(rr, rr, rr)(s, s, s)R_1RR_1$$

$$\text{mit } \pi_{ss}(276)(384)\pi_s = (132)(276)(798)(276)(384)(123)(456)(789) = (195)(276)$$

damit ist

$$\alpha_{4,0} = (195)(276)(rr, rr, rr)(s, s, s)RR, \quad \text{Standardform: } \alpha_{4,0}^2 = (159)(267)(r, r, r)(ss, ss, ss)R$$

Man sieht:  $\alpha_{4,0}$  gehört nicht zu  $H(I_0)$ .

b) Umformung von  $\beta_{4,0}$ :

$$\beta_{4,0} = R_1(ss, ss, ss)\pi_{ss}(1, rr, r)(384)(r, r, r)R(1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1$$

$$\beta_{4,0} = \pi_{ss}(384)\pi_s(r, r, r)S$$

$$\text{mit } \pi_{ss}(276)(384)\pi_s = (132)(276)(798)(384)(123)(456)(789) = (276)$$

damit ist

$$\beta_{4,0} = (276)(r, r, r)S.$$

Man sieht:  $\beta_{4,0}$  gehört offenbar zu  $H(I_0)$ .

c) Umformung von  $\alpha_{0,4}$ :

$$\alpha_{0,4} = \gamma\alpha_0\gamma^{-1} \quad \gamma = (1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1$$

$$\alpha_{0,4} = (1, r, rr)\pi_s(s, s, s)R_1(384)(s, s, s)R R_1\pi_{ss}(ss, ss, ss)(1, rr, r)$$

$$\alpha_{0,4} = \pi_s(384)\pi_{ss}(rr, rr, rr)(s, s, s)R_1RR_1$$

$$\text{mit } \pi_s(384)\pi_{ss} = (123)(456)(789)(384) (132)(276)(798) = (195)$$

damit ist

$$\alpha_{0,4} = (195)(rr, rr, rr)(s, s, s)RR, \quad \text{Standardform: } \alpha_{0,4}^2 = (159)(r, r, r)(ss, ss, ss)R,$$

Man sieht:  $\alpha_{0,4}$  gehört nicht zu  $H(I_4)$ .

d) Umformung von  $\beta_{0,4}$ :

$$\beta_{0,4} = (1,r,rr)\pi_s(s,s,s)R_1(276)(r,r,r)S R_1(ss,ss,ss)\pi_{ss}(1,rr,r)$$

$$\beta_{0,4} = \pi_s(276)\pi_{ss}(r,r,r)S$$

$$\text{mit } \pi_s(276)\pi_{ss} = (123)(456)(789)(276)(132)(276)(798) = (384)$$

damit ist

$$\beta_{0,4} = (384)(r,r,r)S.$$

Man sieht:  $\beta_{0,4}$  gehört offenbar zu  $H(I_4)$ .

Damit ist in Standardform

$$H(I_4, I_0) = \langle \alpha_{4,0}^2, \beta_{4,0} \rangle \\ = \langle (159)(267)(r,r,r)(ss,ss,ss)R, (276)(r,r,r)S \rangle$$

und

$$H(I_0, I_4) = \langle \alpha_{0,4}^2, \beta_{0,4} \rangle \\ = \langle (159)(267)(r,r,r)(ss,ss,ss)R, (384)(r,r,r)S \rangle$$

Offensichtlich haben die Operatoren der Konjunktionsbilder in der Summe eine komplexere Form als die Operatoren der Hauptgruppe.

Eine Ausnahme bildet das Paar  $I_0, J_0$ .

Hier ist  $J_0 = \chi I_0$  und  $I_0 = \chi J_0$ , mit  $\chi = \pi_Q Q$ ,

$$\chi = (23)(47)(59)(68)(r_1, r_1, r_1)(s_1, s_1, s_1)R_1 S_1 \text{ und } \chi = \chi^{-1}$$

Man erhält

$$a) \alpha_{J,I} = \pi_Q Q(276)(s,s,s)R\pi_Q Q$$

$$\alpha_{J,I} = \pi_Q(276)\pi_Q Q(s,s,s)RQ$$

$$\alpha_{J,I} = (348)(s_1 s s_1, s_1 s s_1, s_1 s s_1)R_1 R R_1$$

$$\alpha_{J,I} = (348)(ss,ss,ss)RR,$$

$$\text{Standardform: } \alpha_{J,I}^2 = (384)(s,s,s)R$$

$$b) \beta_{J,I} = \pi_Q Q(384)(r,r,r)S\pi_Q Q$$

$$\beta_{J,I} = \pi_Q Q(384)\pi_Q Q(r,r,r)S$$

$$\beta_{J,I} = (267)(r_1 r r_1, r_1 r r_1, r_1 r r_1)S_1 S S_1$$

$$\beta_{J,I} = (267)(rr,rr,rr)SS,$$

$$\text{Standardform: } \beta_{J,I}^2 = (276)(r,r,r)S$$

$$c) \alpha_{I,J} = \pi_Q Q(384)(s,s,s)R\pi_Q Q$$

$$\alpha_{I,J} = (267)(ss,ss,ss)RR,$$

$$\text{Standardform: } \alpha_{I,J}^2 = (276)(s,s,s)R$$

$$d) \beta_{I,J} = \pi_Q Q(276)(r,r,r)S\pi_Q Q$$

$$\beta_{I,J} = (348)(rr,rr,rr)SS,$$

$$\text{Standardform: } \beta_{I,J}^2 = (276)(r,r,r)S$$

Man hat also  $H(J_0, I_0) = H(I_0)$  und  $H(I_0, J_0) = H(J_0)$ .

Die Sudokus  $I_0 = N16$ ,  $J_0 = N22$  sind nicht nur die einzigen unitären Sudokus, die fix unter  $\pi_T T$  (transponieren, renormieren) sind, es ist auch das einzige Paar unitärer Sudokus, deren über die Hauptgruppen des Partners durch Konjunktion gewonnene Fixnebengruppe gleich ihrer Hauptgruppe ist. Man kann zudem sagen, es sind jene Sudokus unter allen Spreizsudokus E27, die sich anhand der Fixsudokus ihrer Hauptgruppen oder Fixnebengruppen am einfachsten aus dem Normblock e rekonstruieren lassen.

### Sudokus im 1-Regel-Umfeld von Ni, (i=12,...,23)

Die Menge der Sudokus in 1-Regelform nennen wir  $X_{1R}$ . Ein Sudoku B dieser Menge nennen wir ein 1R-Mischgruppen-Superfix, wenn es zwei Fixoperatoren  $\pi_R(s,s,s)R$  und  $\pi_S(r,r,r)S$  besitzt, wobei  $\pi_R, \pi_S$  Ziffernpermutationen aus  $Z$  sind, also Permutationen der Symbolmenge  $\{1,2,\dots,9\}$ . Damit ist B auch fix unter allen von den beiden Fixoperatoren erzeugten Operatoren. Es ist eine Untergruppe der Mischgruppe  $M = Z \times G$ ,  $G$  wie Sudokugruppe. Die erzeugte Menge notieren wir  $H(\pi_R, \pi_S) = \langle \pi_R(s,s,s)R, \pi_S(r,r,r)S \rangle$ . Notwendig sind es Permutationen, die die Ziffer 1 festlassen und - sofern sie nicht die Identität sind - haben sie die Ordnung 3. Die Gruppe  $H(\pi_R, \pi_S)$  hat damit stets 9 Elemente und operiert transitiv und treu auf der Menge der Blöcke von  $B = (b_{i,j})$ , ( $i,j = 1,2,3$ ), mit  $b_{11} = e$ .

Beispiele für Permutationen der Ordnung 3 sind die zyklischen Permutationen der Hauptdiagonaldreier des Normblocks. Es sind die Dreierzyklen (159), (195), (267), (276), (348), (384). Sie bilden die Gruppe  $Z_{hd} = \langle (159), (267), (348) \rangle$ .

Eine Untergruppe hiervon, die die 1 fest lässt, ist

$$Z_{hd,2 \times 3} = \langle (267), (348) \rangle \\ = \{id, (267), (276), (348), (384), (267)(348), (267)(384), (276)(348), (276)(384)\}.$$

Die zyklischen Permutationen der Antidiagonaldreier des Normblocks sind die Dreierzyklen (168), (186), (267), (249), (357), (375). Sie bilden die Gruppe  $Z_{ad} = \langle (168), (249), (357) \rangle$ .

Eine Untergruppe hiervon, die die Ziffer 1 fest lässt, ist

$$Z_{ad,2 \times 3} = \langle (249), (357) \rangle \\ = \{id, (249), (294), (357), (375), (249)(357), (249)(375), (294)(357), (294)(375)\}.$$

Analog ergeben sich Beispiele für Permutationen der Ordnung 3 anhand der horizontalen Dreier sowie anhand der vertikalen Dreier des Normblocks. Untergruppen, die die Ziffer 1 festlassen, sind entsprechend  $Z_{hor,4 \times 7} = \langle (456), (789) \rangle$ ,  $Z_{ver,2 \times 3} = \langle (258), (369) \rangle$ .

Man hat den **Generationsatz** für 1R-Mischgruppen-Superfixe:

Wenn ein Sudoku B aus  $X_{1R}$  ein 1R-Superfix mit den Operatoren  $\pi_R(s,s,s)R$  und  $\pi_S(r,r,r)S$  ist, hat B die Blockdarstellung mit der  $\pi$ -Signatur  $\pi(B)$

$$\begin{array}{lll} e, & \pi_S r e, & \pi_S^2 r r e \\ \pi_R s e, & \pi_R \pi_S r s e, & \pi_R \pi_S^2 r r s e \\ \pi_R^2 s s e, & \pi_R^2 \pi_S r s s e, & \pi_R^2 \pi_S^2 r r s s e \end{array} \quad \begin{array}{lll} id, & \pi_S, & \pi_S^2 \\ \pi_R, & \pi_R \pi_S, & \pi_R \pi_S^2 \\ \pi_R^2, & \pi_R^2 \pi_S, & \pi_R^2 \pi_S^2. \end{array}$$

Ist umgekehrt ein Sudoku mit einer solchen Blockdarstellung vorgegeben und ist  $\pi_R^3 = id$ ,  $\pi_S^3 = id$ , so ist es fix unter den Operatoren  $\langle \pi_R(s,s,s)R, \pi_S(r,r,r)S \rangle$ .

Beweis:

$H(\pi_R, \pi_S)$  operiert transitiv und treu auf der Menge der Blöcke des Fixsudokus B. Die Hintereinanderausführung von Fixoperatoren ist wieder ein Fixoperator. Die erzeugenden Fixoperatoren von  $H(\pi_R, \pi_S)$  kommutieren. Das ergibt die angegebene Form der Blöcke. Die 1-Regelform ergibt sich aus der Transformation des e-Blocks anhand der Operatoren der Gruppe  $H = \langle (s,s,s)R, (r,r,r)S \rangle$ .

Man erzeugt die Blockdarstellung bequem mit dem rekursiven Algorithmus

$$\begin{array}{lll} b_{11} = e, & b_{12} = \pi_S r e, & b_{13} = \pi_S r b_{12}, \\ b_{21} = \pi_R s e, & b_{22} = \pi_R s b_{12}, & b_{23} = \pi_R s b_{13}, \\ b_{31} = \pi_R^2 s s e, & b_{32} = \pi_R^2 s s b_{12}, & b_{33} = \pi_R^2 s s b_{13}. \end{array}$$

Haben umgekehrt die Blöcke von B die angegebene Form, so ergibt sich:

$$\pi_R(s,s,s)R \cdot B = \pi_R B' = \pi_R(b'_{i,j}), (i,j = 1,2,3) \text{ mit}$$

$$\begin{aligned} b_{11}' &= \pi_R^2 e, & b_{12}' &= \pi_R^2 re, & b_{13}' &= \pi_R^2 rre \\ b_{21}' &= se, & b_{22}' &= rse, & b_{23}' &= rre \\ b_{31}' &= \pi_R sse & b_{32}' &= \pi_R rsse & b_{33}' &= \pi_R rrsse. \end{aligned}$$

Damit ist dann  $\pi_R(b'_{i,j}) = (\pi_R b'_{i,j}) = (b_{i,j})$ .

Analog ergibt sich  $\pi_S(r,r,r)S \cdot B = B$ .

Ein Sonderfall unter den 1R-Superfixen ist das unitäre Superfix  $U_3^{***}$  mit  $\pi_R = \pi_S = \text{id}$ .

Dies Superfix hat folgende Partitionen seiner Dreiermengen:  $9 \times 3_{\text{hor}}$ ,  $9 \times 3_{\text{ver}}$ ,  $9 \times 3_{\text{hd}}$ ,  $9 \times 3_{\text{ad}}$ , die Dreiermengen sind paarweise disjunkt.

Die Permutationen  $\pi_R, \pi_S$  bewirken im Allgemeinen ein Zergliedern der Partition von  $U_3^{***}$ .

In den Fällen  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{hd},2 \times 3}$  und  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{ad},2 \times 3}$  erhält man 1-Regel-Sudokus bis hin zum Extremfall der Spreizsudokus  $E27 N_i$  ( $i=12, \dots, 23$ ). Die Sudokus  $N16, N17, N12, N22, N23, N18$  – ihre Menge schreiben wir  $E27_{\text{hd}_{K1, \text{uni}}}$  – haben die Partition  $9 \times 3_{\text{hd}}, 1 \times 27_{\text{hor}}, 1 \times 27_{\text{ver}}, 1 \times 27_{\text{ad}}$  mit gleichen hor-, ver-, ad-Dreiermengen und die Sudokus  $N13, N14, N15, N19, N20, N21$  – ihre Menge schreiben wir  $E27_{\text{ad}_{K1, \text{uni}}}$  – haben die Partition  $9 \times 3_{\text{ad}}, 1 \times 27_{\text{hor}}, 1 \times 27_{\text{ver}}, 1 \times 27_{\text{hd}}$  mit gleichen hor-, ver-, hd-Dreiermengen.

Die 27 Dreier der erstgenannten sechs kann man leicht mit den Tripeln des carthesischen Produkts  $\{1,5,9\} \times \{2,6,7\} \times \{3,4,8\}$  aufzählen und die der restlichen sechs mit den Tripeln des carthesischen Produkts  $\{1,6,8\} \times \{2,4,9\} \times \{3,5,7\}$ . In beiden Fällen steht beispielsweise das Tripel  $(1,2,3)$  für den Dreier  $\{1,2,3\}$ .

Im Umfeld der Spreizsudokus  $N_i$  ( $i=12, \dots, 23$ ) liegen die 1R-Mischgruppen-Superfixe mit  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{hd},2 \times 3}$  oder aus  $Z_{\text{ad},2 \times 3}$ .

Nicht bei jeder Wahl von  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{hd},2 \times 3}$  oder  $Z_{\text{ad},2 \times 3}$  erfüllt das Bild eines normierten Sudokus B unter den Operatoren  $\langle \pi_R(s,s,s)R, \pi_S(r,r,r)S \rangle$  die Sudokubedingungen.

Wenn im Fall  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{hd},2 \times 3}$  eine der Ziffernpermutationen (348), (267) enthält, ist die durch den Algorithmus erzeugte Matrix kein Sudoku. Wenn beispielsweise (348) in  $\pi_R$  vorkommt, erscheint die Ziffer 4 in der ersten Spalte des Westblocks. Falls (348) in  $\pi_S$ , vorkommt, erscheint die Ziffer 4 in der mittleren Zeile des Nordblocks. In bezug auf den Normblock ist in beiden Fällen die Sudokubedingung verletzt.

Entsprechendes gilt für die Permutation (267). Hier wird die Sudokubedingung durch die Lage der Ziffer 6 im West- bzw. Nordblock bezogen auf den Normblock verletzt.

Also können  $\pi_R, \pi_S$  nur Elemente aus der Menge  $\{\text{id}, (384), (276), (384)(276)\}$  sein.

Im Fall  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{ad},2 \times 3}$  ergibt sich mit entsprechender Argumentation:

Es gibt Widersprüche zur Sudokubedingung zwischen Westblock und Normblock wenn (375) oder  $\pi_R = (294)$  ist, und es gibt Widersprüche zwischen Nordblock und Normblock, wenn  $\pi_S = (357)$  oder  $\pi_S = (249)$  ist.

Also kann  $\pi_R$  nur ein Element aus der Menge  $\{\text{id}, (357), (249), (357)(249)\}$  und  $\pi_S$  nur ein Element aus der Menge  $\{\text{id}, (375), (294), (375)(294)\}$  sein.

Im Fall  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{hor},4 \times 7}$  ergeben sich Widersprüche, wenn  $\pi_R = (456)$  oder (789) ist.

Im Fall  $\pi_R, \pi_S$  aus  $Z_{\text{ver},2 \times 3}$  ergeben sich Widersprüche, wenn  $\pi_S = (258)$  oder (369) ist.

Alle anderen Fälle sind zulässig.

Im Fall  $Z_{\text{hor},4 \times 7}$  ist demnach  $H(\pi_R, \pi_S) = \langle \pi_R(s,s,s)R, \pi_S(r,r,r)S \rangle$  Hauptgruppe eines 1-Regel-Mischgruppen-Superfix, wenn  $\pi_R \in \{\text{id}, (465), (798), (465)(798)\}$  und  $\pi_S \in \{\text{id}, (456), (465), (789), (798), (456)(789), (456)(798), (465)(789), (465)(798)\}$  ist.

Demnach gibt es einschließlich des Superfix  $U_3^{***}$  insgesamt  $4 \times 9 = 36$  die Hauptgruppen kennzeichnende Paare  $(\pi_R, \pi_S)$  für derartige Sudokus.

Im Fall  $\pi_R \neq \text{id}$  und  $\pi_S \neq \text{id}$  sind es noch  $3 \times 8 = 24$  Sudokus. Eine extreme Zergliederung der Partition von  $U_3^{***}$  in die Partition  $9 \times 3_{\text{hor}}$ ,  $1 \times 27_{\text{ver}}$ ,  $1 \times 27_{\text{hd}}$ ,  $1 \times 27_{\text{ad}}$  mit gleichen ver-, hd-, ad- Dreiermengen – die Menge der betroffenen Sudokus schreiben wir  $D27_{\text{hor}_{K1, \text{uni}}}$  – bewirken die folgenden 18 Paare  $(\pi_R, \pi_S)$ :

$((465), (798))$	$((798), (465))$	$((465)(798), (465))$
$((465), (798)(465))$	$((798), (465)(798))$	$((465)(798), (456))$
$((465), (798)(456))$	$((798), (465)(789))$	$((465)(798), (798))$
$((465), (789))$	$((798), (456))$	$((465)(798), (789))$
$((465), (789)(465))$	$((798), (456)(798))$	$((465)(798), (465)(789))$
$((465), (789)(456))$	$((798), (456)(789))$	$((465)(798), (456)(798))$

Die 27 Dreier sind durchweg dieselben und lassen sich leicht mit den Tripeln des carthesischen Produkts  $\{1,2,3\} \times \{4,5,6\} \times \{7,8,9\}$  aufzählen.

Das Sudoku zu dem Paar  $((465), (798))$  ist im Beispiel 4 angegeben.

Nicht jedes Sudoku hat eine extrem zergliederte ver-, hd-, ad-Partition.

Beispiel 5 zeigt ein solches mit einer Partition  $9 \times 3_{\text{hor}}$ ,  $3 \times 9_{\text{ver}}$ ,  $3 \times 9_{\text{hd}}$ ,  $3 \times 9_{\text{ad}}$ .

Analoges gilt für  $Z_{\text{ver}, 2 \times 3}$ .

Hier gibt es 18 Paare  $(\pi_R, \pi_S)$  aus  $Z_{\text{ver}, 2 \times 3}$ , deren Mischgruppen-Superfixe im 1-Format eine extreme Zergliederung der Partition von  $U_3^{***}$  in eine Partition  $9 \times 3_{\text{ver}}$ ,  $1 \times 27_{\text{hor}}$ ,  $1 \times 27_{\text{hd}}$ ,  $1 \times 27_{\text{ad}}$  mit gleichen hor-, hd-, ad-Dreiermengen zeigen. Die Menge schreiben wir

$D27_{\text{ver}_{K1, \text{uni}}}$ . Die Paare  $(\pi_R, \pi_S)$  sind:

$((396), (285))$	$((285), (396))$	$((285), (285)(396))$
$((396)(285), (285))$	$((285)(396), (396))$	$((258), (285)(396))$
$((396)(258), (285))$	$((285)(369), (396))$	$((396), (285)(396))$
$((369), (285))$	$((258), (396))$	$((369), (285)(396))$
$((369)(285), (285))$	$((258)(396), (396))$	$((285)(369), (285)(396))$
$((369)(258), (285))$	$((258)(369), (396))$	$((258)(396), (285)(396))$

Die 27 Dreier lassen sich mit den Tripeln von  $\{1,4,7\} \times \{2,5,8\} \times \{3,6,9\}$  aufzählen.

Das Sudoku zu dem Paar  $((285), (396))$  ist im Beispiel 6 angegeben.

### Beispiele diverser 1-Regel- Mischgruppen-Superfixe

Im Fall  $(\pi_R, \pi_S)$  aus  $Z_{\text{hd}, 2 \times 3}$  bilden folgende Paare kein Spreizsudoku E27:

Die durch die Paare bestimmten Sudokus notieren wir der Reihe nach  $C_0, C_1, \dots, C_9$ .

$C_0$ : id, id

$C_1$ : (276), (276)

$C_4$ : id, (276)

$C_7$ : (276), id

$C_2$ : (384), (384)

$C_5$ : id, (384)

$C_8$ : (384), id

$C_3$ : (276)(384), (276)(384)

$C_6$ : id, (276)(384)

$C_9$ : (276)(384), id

Auch im Fall  $(\pi_R, \pi_S)$  aus  $Z_{\text{ad}, 2 \times 3}$  bilden folgende Paare kein Spreizsudoku E27.

Die durch die Paare bestimmten Sudokus notieren wir der Reihe nach  $C_1^+, \dots, C_9^+$ .

$C_1^+$ : (357), (375)

$C_4^+$ : id, (375)

$C_7^+$ : (357)

$C_2^+$ : (249), (294)

$C_5^+$ : id, (294)

$C_8^+$ : (249), id

$C_3^+$ : (357)(249), (375)(294)

$C_6^+$ : id, (375)(294)

$C_9^+$ : (357)(249), id

Beispiele 1:

Im Trivialfall  $\pi_R = \pi_S = \text{id}$  ist  $C_0$  das auf der home-page „Sudoku-Ornamente“ eingeführte Superfix  $U_3^{***}$ .

In Blockdarstellung:

$$C_0 = U_3^{***} = \begin{pmatrix} e & re & rre \\ se & rse & rrse \\ sse & rsse & rrsse \end{pmatrix}$$

In Zifferndarstellung:

$$C_0 = U_3^{***} = \begin{array}{l} 123\ 789\ 456 \\ 456\ 123\ 789 \\ 789\ 456\ 123 \\ \\ 312\ 978\ 645 \\ 645\ 312\ 978 \\ 978\ 645\ 312 \\ \\ 231\ 897\ 564 \\ 564\ 231\ 897 \\ 897\ 564\ 231 \end{array}$$

Partitionen: 9x3 hor, 9x3 ver, 9x3 hd, 9x3 ad, alle vier Dreiermengen sind paarweise disjunkt.

Beispiel 2:

$H(C_8) = \langle (384)(s,s,s)R, (r,r,r)S \rangle, \pi = (384)$

In Blockdarstellung:

$$C_8 = \begin{pmatrix} e & re & rre \\ \pi se & \pi rse & \pi rrse \\ \pi^2 sse & \pi^2 rsse & \pi^2 rrsse \end{pmatrix}$$

In Zifferndarstellung:

$$C_8 = \begin{array}{l} 123\ 789\ 456 \\ 456\ 123\ 789 \\ 789\ 456\ 123 \\ \\ 812\ 974\ 635 \\ 635\ 812\ 974 \\ 974\ 635\ 812 \\ \\ 241\ 397\ 568 \\ 568\ 241\ 397 \\ 397\ 568\ 241 \end{array}$$

Partitionen:

3x9 hor, 3x9 ver, 9x3 hd, 3x9 ad,  
alle vier Dreiermengen sind disjunkt.



Die Zifferndarstellung erhält man bequem durch den Bezug auf die Zifferndarstellung von  $U_3^{***}$  mit der  $\pi$ -Signatur  $\pi(C_8)$

$$\pi(C_8) = \begin{pmatrix} id & id & id \\ 384 & 384 & 384 \\ 348 & 348 & 348 \end{pmatrix}$$

Damit ist  $\pi(C_8)U_3^{***} = C_8$ .

Beispiel 3:

$$H(C_1^+) = \langle (357)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle$$

In Blockdarstellung:

$$C_1^+ = \begin{pmatrix} e & \pi_s r e & \pi_s^2 r^2 e \\ \pi_r s e & r s e & \pi_s r^2 s e \\ \pi_r^2 s^2 e & \pi_r r s^2 e & r^2 s^2 e \end{pmatrix}$$

In Zifferndarstellung:

$$C_1^+ = \begin{pmatrix} 123 & 589 & 476 \\ 456 & 127 & 389 \\ 789 & 436 & 125 \\ \\ 512 & 978 & 643 \\ 647 & 312 & 958 \\ 938 & 645 & 712 \\ \\ 271 & 893 & 564 \\ 364 & 251 & 897 \\ 895 & 764 & 231 \end{pmatrix}$$

Partitionen:

3x9 hor, 3x9 ver, 3x9 hd, 9x3 ad, alle vier Dreiermengen sind paarweise disjunkt.

Die Zifferndarstellung erhält man mit der  $\pi$ -Signatur  $\pi(C_1^+)$

$$\pi(C_1^+) = \begin{pmatrix} id & 375 & 357 \\ 357 & id & 375 \\ 375 & 357 & id \end{pmatrix}$$

Damit ist  $\pi(C_1^+)U_3^{***} = C_1^+$ .

Beispiel 4:

Beispiel für ein Sudoku A mit  $(\pi_R, \pi_S)$  aus  $Z_{\text{hor}, 4 \times 7}$ .  
 Es sei  $H(A) = \langle (465)(s,s,s)R, (798)(r,r,r)S \rangle$

$$\pi(A) = \begin{pmatrix} id & (798) & (789) \\ 465 & (465)(798) & (465)(789) \\ (456) & (456)(798) & (456)(789) \end{pmatrix}$$

123 978 456  
 456 123 897  
 789 456 123

$$\pi(A)U_3^{***} = \begin{matrix} 312 897 564 \\ 564 312 789 \\ 978 564 312 \end{matrix}$$

Partitionen der Dreiermengen:  
 9x3hor, 1x27ver, 1x27hd, 1x27ad.

231 789 645  
 645 231 978  
 897 645 231

Beispiel 5:

Beispiel für ein Sudoku B mit  $(\pi_R, \pi_S)$  aus  $Z_{\text{hor}, 4 \times 7}$ .  
 Es sei  $H(B) = \langle (465)(798)(s,s,s)R, (456)(789)(r,r,r)S \rangle$

$$\pi(B) = \begin{pmatrix} id & (456)(789) & (465)(798) \\ (465)(798) & id & (456)(789) \\ (456)(789) & (465)(798) & id \end{pmatrix}$$

123 897 645  
 456 123 978  
 789 564 123

$$\pi(B)U_3^{***} = \begin{matrix} 312 978 456 \\ 564 312 789 \\ 897 645 312 \end{matrix}$$

Partitionen der Dreiermengen:  
 9x3hor, 3x9ver, 3x9hd, 3x9ad.

231 789 564  
 645 231 897  
 978 456 231

Beispiel 6:

Beispiel für ein Sudoku C mit  $(\pi_R, \pi_S)$  aus  $Z_{\text{ver}, 2 \times 3}$ .  
 Es sei  $H(C) = \langle (285)(s,s,s)R, (396)(r,r,r)S \rangle$

$$\pi(C) = \begin{pmatrix} id & (396) & (369) \\ (285) & (285)(396) & (285)(369) \\ (258) & (258)(396) & (258)(369) \end{pmatrix}$$

123 786 459  
 456 129 783  
 789 453 126

$$\pi(C)U_3^{***} = \begin{matrix} 318 675 942 \\ 642 918 375 \\ 975 342 618 \end{matrix}$$

Partitionen der Dreiermengen:  
 9x3ver, 1x27hor, 1x27hd, 1x27ad.

531 267 894  
 864 591 237  
 297 834 561

Beispiel 7:

Beispiel für ein Sudoku D mit  $(\pi_R, \pi_S)$  von  $Z_{\text{hor}, 4 \times 7}$ .  
 Es sei  $H(D) = \langle (465)(798)(s,s,s)R, (465)(789)(r,r,r)S \rangle$

$$\pi(D) = \begin{pmatrix} id & (465)(789) & (456)(798) \\ (465)(798) & (456) & (789) \\ (456)(789) & (798) & (465) \end{pmatrix}$$

123 897 564  
 456 123 978  
 789 645 123

$$\pi(D)U_3^{***} = \begin{matrix} 312 978 645 \\ 564 312 789 \\ 897 456 312 \end{matrix}$$

Partitionen der Dreiermengen:  
 9x3hor, 27x1ver, 27x1hd, 27x1ad.

231 789 456  
 645 231 897  
 978 564 231

**Generation der  $N_i$ , ( $i = 12, \dots, 23$ ) mittels  $\pi(N_i)$  und  $U_3^{***}$**

**Generation der sechs Sudokus von E27,hd  $\kappa_{1,uni}$**

$\pi$ -Signatur von  $\pi(I_0)$  von  $H(I_0) = \langle (384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle$ ,

id	(276)	(267)	
(384)	(276)(384)	(267)(384)	damit ist $\pi(I_0)U_3^{***} = I_0 = N16$
(348)	(276)(348)	(267)(348)	

$\pi$ -Signatur von  $\pi(I_4)$  von  $H(I_4) = \langle (276)(384)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle$

id	(384)	(348)	
(276)(384)	(276)(384)	(276)	damit ist $\pi(I_4)U_3^{***} = I_4 = N17$
(267)(348)	(267)	(267)(384)	

$\pi$ -Signatur von  $\pi(I_5)$  von  $H(I_5) = \langle (276)(s,s,s)R, (276)(384)(r,r,r)S \rangle$

id	(276)(384)	(267)(348)	
(267)	(267)(384)	(348)	damit ist $\pi(I_5)U_3^{***} = I_5 = N12$
(267)	(384)	(276)(348)	

$\pi$ -Signatur von  $\pi(J_0)$  von  $H(J_0) = \langle (276)(s,s,s)R, (384)(r,r,r)S \rangle$

id	(384)	(348)	
(276)	(276)(384)	(348)	damit ist $\pi(J_0)U_3^{***} = J_0 = N22$
(267)	(267)(384)	(267)(348)	

$\pi$ -Signatur von  $\pi(J_4)$  von  $H(J_4) = \langle (384)(s,s,s)R, (276)(384)(r,r,r)S \rangle$

id	(276)(384)	(267)(348)	
(384)	(276)(348)	(267)	damit ist $\pi(J_4)U_3^{***} = J_4 = N23$
(348)	(276)	(267)(384)	

$\pi$ -Signatur von  $\pi(J_5)$  von  $H(J_5) = \langle (276)(384)(s,s,s)R, (276)(r,r,r)S \rangle$

id	(276)(384)	(267)(348)	
(276)	(267)(384)	(348)	damit ist $\pi(J_5)U_3^{***} = J_5 = N18$
(267)	(384)	(276)(348)	

**Generation der sechs Sudokus von E27,ad  $\kappa_{1,uni}$**

Ziffernsignatur von  $\pi(I_1)$  von  $H(I_1) = \langle (249)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle =$

Id	(375)	(357)	
(249)	(249)(375)	(249)(357)	damit ist $\pi(I_1)U_3^{***} = I_1 = N14$
(294)	(375)	(294)(357)	

$\pi$ -Signatur von  $\pi(I_2)$  von  $H(I_2) = \langle (249)(357)(s,s,s)R, (294)(r,r,r)S \rangle$

id            (294)        (249)  
 (249)(357) (357)        (294)(357)            damit ist  $\pi(I_2)U_3^{***} = I_2 = N15$   
 (294)(375) (249)(375) (375)

$\pi$ -Signatur von  $\pi(I_3)$  von  $H(I_3) = \langle (357)(s,s,s)R, (294)(375)(r,r,r)S \rangle$

id    (294)(375) (249)(357)  
 (357) (294)        (249)(375)            damit ist  $\pi(I_3)U_3^{***} = I_3 = N13$   
 (375) (294)(357) (249)

$\pi$ -Signatur von  $\pi(J_1)$  von  $H(J_1) = \langle (357)(s,s,s)R, (294)(r,r,r)S \rangle$

id    (294)        (249)  
 (357) (294)(357) (249)(357)            damit ist  $\pi(J_1)U_3^{***} = J_1 = N20$   
 (375) (294)(375) (249)(375)

$\pi$ -Signatur von  $\pi(J_2)$  von  $H(J_2) = \langle (249)(s,s,s)R, (294)(375)(r,r,r)S \rangle$

Id    (294)(375) (249)(357)  
 (249) (375)        (294)(357)            damit ist  $\pi(J_2)U_3^{***} = J_2 = N21$   
 (294) (249)(375) (357)

$\pi$ -Signatur von  $\pi(J_3)$  von  $H(J_3) = \langle (249)(357)(s,s,s)R, (375)(r,r,r)S \rangle$

id            (375)        (357)  
 (249)(357) (249)        (375)(249)            damit ist  $\pi(J_3)U_3^{***} = J_3 = N19$   
 (294)(375) (294)(357) (294)

Die Menge der Signaturen  $\pi(I_i), \pi(J_i), (i=0, \dots, 5)$  notieren wir  $\Pi_{K1,uni,E27}$ . Damit kann man schreiben  $\Pi_{K1,uni,E27}U_3^{***} = \Gamma_{K1,uni,E27}$ . Die Signaturen der 1-Regel-Sudokus stehen im Verbund mit  $(s,s,s)R, (r,r,r)S$ .

### Generation von $R_1Ni, S_1Ni, R_1S_1Ni$ mittels $U_2^{***}, U_1^{***}, U_4^{***}$

Es ist  $Ni = \pi(Ni)U_3^{***}$

Damit ist  $R_1Ni = R_1(\pi(Ni)U_3^{***})$   
 $= R_1\pi(Ni)R_1U_3^{***}$   
 $= \pi(R_1Ni)U_2^{***}$

und  $S_1Ni = S_1(\pi(Ni)U_3^{***})$   
 $= S_1\pi(Ni)S_1U_3^{***}$   
 $= \pi(S_1Ni)U_1^{***}$

und  $R_1S_1Ni = R_1S_1(\pi(Ni)U_3^{***})$   
 $= R_1S_1\pi(Ni)R_1S_1U_3^{***}$   
 $= \pi(R_1S_1Ni)U_4^{***}$

Zusammen mit  $\pi(Ni)U_3^{***}$  hat man

$\Omega_{uni,E27} = \{ \pi(Ni)U_3^{***}, \pi(R_1Ni)U_2^{***}, \pi(S_1Ni)U_1^{***}, \pi(R_1S_1Ni)U_4^{***}; i=12, \dots, 23 \}$ .

### U<sub>3</sub><sup>\*\*\*</sup>-Signaturen für die Sudokus von D27hor<sub>K1,uni</sub>

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465), (798))$

id (798) (789)  
 (465) (798)(465) (789)(465)  
 (456) (798)(456) (789)(456)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465), (798)(465))$

id (798)(465) (789)(456)  
 (465) (798)(456) (789)  
 (456) (798) (789)(465)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465), (798)(456))$

id (798)(456) (789)(465)  
 (465) (798) (789)(456)  
 (456) (798)(465) (789)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465), (789))$

id (789) (798)  
 (465) (789)(465) (798)(465)  
 (456) (789)(456) (798)(456)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465), (789)(465))$

id (789)(465) (798)(456)  
 (465) (789)(456) (798)  
 (456) (789) (798)(465)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465), (789)(456))$

id (789)(456) (798)(465)  
 (465) (789) (798)(456)  
 (456) (789)(465) (798)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((798), (465))$

id (465) (456)  
 (798) (465)(798) (456)(798)  
 (789) (465)(789) (456)(789)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((798), (465)(798))$

id (465)(798) (456)(789)  
 (798) (465)(789) (456)  
 (789) (465) (456)(789)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((798), (465)(789))$

id (465)(789) (456)(798)  
 (798) (465) (456)(789)  
 (789) (465)(789) (456)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((798), (456))$

id (456) (465)  
 (798) (456)(798) (465)(798)  
 (789) (456)(789) (465)(789)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((798), (456)(798))$

id (456)(798) (465)(789)  
 (798) (456)(789) (465)  
 (789) (456) (465)(798)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((798), (456)(789))$

id (456)(789) (465)(798)  
 (798) (465) (465)(789)  
 (789) (465)(798) (465)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465)(798), (465))$

id	(465)	(456)
(465)(798)	(456)(798)	(798)
(456)(789)	(789)	(465)(789)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465)(798), (798))$

id	(798)	(789)
(465)(798)	(789)(465)	(465)
(456)(789)	(456)	(798)(456)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465)(798), (456))$

id	(456)	(465)
(465)(798)	(798)	(456)(798)
(456)(789)	(465)(789)	(789)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465)(798), (789))$

id	(789)	(798)
(465)(798)	(465)	(789)(465)
(456)(789)	(798)(456)	(456)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465)(798), (465)(789))$

id	(465)(789)	(456)(798)
(465)(798)	(456)	(789)
(456)(789)	(798)	(465)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((465)(798), (456)(798))$

id	(456)(798)	(465)(789)
(465)(798)	(789)	(456)
(456)(789)	(465)	(798)

Anhand der Operatoren  $R_1, S_1, R_1S_1$  ergeben sich aus den 18 1-Regelsudokus insgesamt 72 unitäre Mischgruppen-Superfixe mit den Partitionen  $9 \times 3$ hor,  $27 \times 1$ ver,  $27 \times 1$ ad,  $27 \times 1$ ad.

### $U_3^{***}$ -Signaturen für die Sudokus von D27ver<sub>K1,uni</sub>

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((396), (285))$

id	(285)	(258)
(396)	(396)(285)	(396)(258)
(369)	(369)(285)	(369)(258)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285), (396))$

id	(396)	(369)
(285)	(285)(396)	(285)(369)
(258)	(258)(396)	(258)(369)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285)(396), (285))$

id	(285)	(258)
(285)(396)	(396)(258)	(396)
(258)(369)	(369)	(369)(285)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285)(396), (396))$

id	(396)	(369)
(285)(396)	(285)(369)	(285)
(258)(369)	(258)	(258)(396)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258)(396), (285))$

id	(285)	(258)
(258)(396)	(396)	(396)(285)
(285)(369)	(369)(258)	(369)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285)(369), (396))$

id	(396)	(369)
(285)(369)	(285)	(285)(396)
(258)(396)	(258)(369)	(258)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((369), (285))$

id	(285)	(258)
(285)(396)	(396)(258)	(396)
(258)(369)	(369)	(369)(285)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258), (396))$

id	(396)	(369)
(258)	(258)(396)	(258)(369)
(285)	(285)(396)	(285)(396)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285)(369), (285))$

id	(285)	(258)
(285)(369)	(369)(258)	(369)
(258)(396)	(396)	(396)(285)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258)(396), (396))$

id	(396)	(369)
(258)(396)	(258)(369)	(258)
(285)(369)	(285)	(285)(396)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258)(369), (285))$

id	(285)	(258)
(258)(369)	(369)	(285)(396)
(285)(396)	(369)	(396)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258)(369), (396))$

id	(39	(369)
(258)(369)	(285)	(258)(396)
(285)(396)	(285)(369)	(258)



$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285), (285)(396))$

id (285)(396) (258)(369)  
(285) (258)(396) (369)  
(258) (396) (285)(369)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258), (285)(396))$

id (285)(396) (258)(369)  
(258) (396) (285)(369)  
(285) (258)(396) (369)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((285)(369), (285)(396))$

id (285)(396) (258)(369)  
(285)(369) (258) (396)  
(258)(396) (369) (258)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((258), (285)(396))$

id (285)(396) (258)(369)  
(258)(396) (369) (285)  
(285)(369) (258) (396)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((396), (285)(396))$

id (285)(396) (258)(369)  
(396) (285)(369) (258)  
(369) (285) (258)(396)

$\pi$ -Signatur  $(\pi_R, \pi_S) = ((369), (285)(396))$

id (285)(396) (258)(369)  
(369) (285) (258)(396)  
(396) (285)(369) (258)

Anhand der Operatoren  $R_1, S_1, R_1S_1$  ergeben sich aus den 18 1-Regelsudokus insgesamt 72 unitäre Mischgruppen-Superfixe mit den Partitionen  $9 \times 3_{\text{ver}}, 27 \times 1_{\text{hor}}, 27 \times 1_{\text{ad}}, 27 \times 1_{\text{ad}}$ .

**Liste N = {Ni, i = 12,...,23}**

N12	N13	N14	N15
123 649 857	123 584 976	123 589 476	123 784 956
456 178 239	456 197 382	456 127 389	456 193 782
789 352 164	789 236 145	789 436 125	789 256 143
317 924 685	512 478 693	314 258 697	514 938 627
245 816 973	647 319 258	695 714 238	697 512 438
968 735 412	938 625 714	278 693 514	238 647 519
631 497 528	271 843 569	931 845 762	971 825 364
574 281 396	364 951 827	562 971 843	362 471 895
892 563 741	895 762 431	847 362 951	845 369 271
N16	N17	N18	N19
123 689 457	123 749 856	123 689 457	123 589 476
456 173 289	456 128 739	456 173 289	456 127 389
789 452 163	789 356 124	789 452 163	789 436 125
812 964 735	817 963 245	817 924 635	514 278 693
635 817 924	235 417 968	235 816 974	697 314 258
974 235 816	964 285 317	964 735 812	238 695 714
241 396 578	641 892 573	641 397 528	971 843 562
568 741 392	578 631 492	578 241 396	362 951 847
397 528 641	392 574 681	392 568 741	845 762 931
N20	N21	N22	N23
123 784 956	123 584 976	123 749 856	123 649 857
456 193 782	456 197 382	456 128 739	456 178 239
789 256 143	789 236 145	789 356 124	789 352 164
512 438 697	314 958 627	317 964 285	812 963 745
647 519 238	695 712 438	245 817 963	635 417 928
938 627 514	278 643 519	968 235 417	974 285 316
271 845 369	931 825 764	631 492 578	241 896 573
364 971 825	562 471 893	574 681 392	568 731 492
895 362 471	847 369 251	892 573 641	397 524 681

Die von A. Schönhage angegebenen Sudokus  $\{N_i, i=0, \dots, 11\}$  sind auf die im Zählalgorithmus angegebenen dbn-Sudokus  $\{G_i, i=3, \dots, 8\}$  bezogen und liefern die gleiche Menge. Der Zusammenhang mit  $\{N_i, i=12, \dots, 23\}$  ist folgender

$N_0 = N_{22}, N_1 = N_{17}, N_2 = N_{23}, N_3 = N_{12}, N_4 = N_{18}, N_5 = N_{16}$   
 $(N_6 = N_{19}, N_7 = N_{14}, N_8 = N_{20}, N_9 = N_{15}, N_{10} = N_{21}, N_{11} = N_{13})$

**Liste G =  $\{G_i, i=1, \dots, 8\}$**

$G_1 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 5\ 7\ 8 & 9:6:4 \\ 4\ 5\ 6 & 3\ 9\ 2 & 8:1:7 \\ 7\ 8\ 9 & 6\ 4\ 1 & 2:3:5 \\ \\ 9\ 6\ 8 & 1^2\ 4 & 5\ 7\ 3 \\ 2\ 4\ 5 & 7^3\ 9 & 6\ 8\ 1 \\ 3\ 1\ 7 & 8^5\ 6 & 4\ 9\ 2 \\ \\ 5\ 7\ 4 & 9\ 6\ 3 & 1\ 2\ 8 \\ 6\ 3\ 1 & 2\ 8\ 5 & 7\ 4\ 9 \\ 8\ 9\ 2 & 4\ 1\ 7 & 3\ 5\ 6 \end{array}$	$G_2 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 9\ 6\ 8 & 5\ 7\ 4 \\ 4\ 5\ 6 & 3\ 1\ 7 & 8\ 9\ 2 \\ 7\ 8\ 9 & 2\ 4\ 5 & 6\ 3\ 1 \\ \\ 5\ 7\ 8 & 1^2\ 4 & 9\ 6\ 3 \\ 6\ 4\ 1 & 7^3\ 9 & 2\ 8\ 5 \\ 3\ 9\ 2 & 8^5\ 6 & 4\ 1\ 7 \\ \\ 9:6:4 & 5\ 7\ 3 & 1\ 2\ 8 \\ 2:3:5 & 6\ 8\ 1 & 7\ 4\ 9 \\ 8:1:7 & 4\ 9\ 2 & 3\ 5 \end{array}$
$G_3 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 5^8\ 6 & 9\ 7\ 4 \\ 4\ 5\ 6 & 3^7\ 9 & 8\ 1\ 2 \\ 7\ 8\ 9 & 2^1\ 4 & 6\ 3\ 5 \\ \\ 9\ 6\ 8 & 1\ 4\ 7 & 5:2:3 \\ 3\ 1\ 7 & 8\ 2\ 5 & 4:9:6 \\ 2\ 4\ 5 & 6\ 9\ 3 & 7:8:1 \\ \\ 5\ 7\ 4 & 9\ 3\ 2 & 1\ 6\ 8 \\ 6\ 3\ 1 & 7\ 5\ 8 & 2\ 4\ 9 \\ 8\ 9\ 2 & 4\ 6\ 1 & 3\ 5\ 7 \end{array}$	$G_4 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 4\ 7\ 9 & 6^8\ 5 \\ 4\ 5\ 6 & 2\ 1\ 8 & 9^7\ 3 \\ 7\ 8\ 9 & 5\ 3\ 6 & 4^1\ 2 \\ \\ 2:3:5 & 1\ 4\ 7 & 8\ 9\ 6 \\ 9:6:4 & 8\ 2\ 5 & 7\ 3\ 1 \\ 8:1:7 & 6\ 9\ 3 & 5\ 2\ 4 \\ \\ 3\ 9\ 2 & 7\ 5\ 4 & 1\ 6\ 8 \\ 5\ 7\ 8 & 3\ 6\ 1 & 2\ 4\ 9 \\ 6\ 4\ 1 & 9\ 8\ 2 & 3\ 5\ 7 \end{array}$
$G_5 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 4:6:9 & 7\ 8\ 5 \\ 4\ 5\ 6 & 7:1:8 & 9\ 2\ 3 \\ 7\ 8\ 9 & 5:3:2 & 4\ 1\ 6 \\ \\ 6\ 3\ 5 & 1\ 4\ 7 & 8\ 9\ 2 \\ 9\ 7\ 4 & 8\ 2\ 5 & 6\ 3\ 1 \\ 8\ 1\ 2 & 6\ 9\ 3 & 5\ 7\ 4 \\ \\ 3^9\ 7 & 2\ 5\ 4 & 1\ 6\ 8 \\ 5^6\ 8 & 3\ 7\ 1 & 2\ 4\ 9 \\ 2^4\ 1 & 9\ 8\ 6 & 3\ 5\ 7 \end{array}$	$G_6 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 7\ 5\ 8 & 4:9:6 \\ 4\ 5\ 6 & 9\ 3\ 2 & 7:8:1 \\ 7\ 8\ 9 & 4\ 6\ 1 & 5:2:3 \\ \\ 8\ 9\ 2 & 1\ 4\ 7 & 6\ 3\ 5 \\ 6\ 3\ 1 & 8\ 2\ 5 & 9\ 7\ 4 \\ 5\ 7\ 4 & 6\ 9\ 3 & 8\ 1\ 2 \\ \\ 2\ 4\ 5 & 3^7\ 9 & 1\ 6\ 8 \\ 3\ 1\ 7 & 5^8\ 6 & 2\ 4\ 9 \\ 9\ 6\ 8 & 2^1\ 4 & 3\ 5\ 7 \end{array}$
$G_7 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 7\ 5\ 4 & 8\ 9\ 6 \\ 4\ 5\ 6 & 9\ 8\ 2 & 7\ 3\ 1 \\ 7\ 8\ 9 & 3\ 6\ 1 & 5\ 2\ 4 \\ \\ 3\ 9\ 2 & 1\ 4\ 7 & 6^8\ 5 \\ 6\ 4\ 1 & 8\ 2\ 5 & 9^7\ 3 \\ 5\ 7\ 8 & 6\ 9\ 3 & 4^1\ 2 \end{array}$	$G_8 = \begin{array}{ccc} 1\ 2\ 3 & 9\ 8\ 6 & 5\ 7\ 4 \\ 4\ 5\ 6 & 3\ 7\ 1 & 8\ 9\ 2 \\ 7\ 8\ 9 & 2\ 5\ 4 & 6\ 3\ 1 \\ \\ 5^6\ 8 & 1\ 4\ 7 & 9\ 2\ 3 \\ 3^9\ 7 & 8\ 2\ 5 & 4\ 1\ 6 \\ 2^4\ 1 & 6\ 9\ 3 & 7\ 8\ 5 \end{array}$

2:3:5 4 7 9 1 6 8  
8:1:7 5 3 6 2 4 9  
9:6:4 2 1 8 3 5 7

9 7 4 5:3:2 1 6 8  
6 3 5 7:1:8 2 4 9  
8 1 2 4:6:9 3 5 7

Gemäß dem Zählalgorithmus sind die Sudokus  $\{G_i, i=1, \dots, 8\}$  Quellen der nötigen 48 dbn-Sudokus zur Erzeugung aller E27-Sudokus.