

## Die Praesudokus einer Winkelfigur

Fritz Ostermann , März 2010 / Feb 2011

### Einleitung

Im Skript „Die Fixsudokus der Sudokugruppe“ wird die Konstruktion eines Fixsudokus mit einem Fixoperator vom RS-Typ mit einem der 40 Sudokus der Listen L36<sub>eee</sub> oder L4<sub>eee</sub> begonnen, also mit einem (mittels einer Vertikalen von [L7]=Liste L80e gebildeten) reduzierten e-normierten Sudoku der Form

$$A = \begin{pmatrix} e & c & b \\ b & e & c \\ c & b & e \end{pmatrix}. \text{ Deren Winkelfiguren } W_{e,3} = \begin{pmatrix} e & c & b \\ b & & \\ c & & \end{pmatrix} \text{ sind in [L7] durch die Blockspalten } \begin{pmatrix} e \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ notiert.}$$

Analog wird die Konstruktion eines Fixsudokus A mit einem Fixoperator vom RSS-Typ mit einem reduzierten e-normierten Sudoku der Form

$$A = \begin{pmatrix} e & b & c \\ b & c & e \\ c & e & b \end{pmatrix} \text{ begonnen, deren Winkelfiguren } W_{e,4} = \begin{pmatrix} e & b & c \\ b & & \\ c & & \end{pmatrix} \text{ ebenfalls durch Blockspalten } \begin{pmatrix} e \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

charakterisiert sind.

Bei einer Konstruktion aller Praesudokus  $W_{e,3}$  oder Praesudokus  $W_{e,4}$ , also aller Zifferbelegungen, die den Sudokubedingungen genügen, ist es belanglos, in welcher Anordnung die Blöcke b,c in einer Zeile oder Spalte stehen. Damit sind mit 40 Praesudokus  $W_{e,4}$  auch 40 Präsudokus  $W_{e,3}$  bestimmt.

Arnold Schönhage hat mit elementar-kombinatorischen Mitteln in der am 7. Februar 2010 verfassten „Kleinen Studie zum 84. Geburtstag von W.Jehne“ die insgesamt  $n_{AS}=40$  Praesudokus  $W_{e,4}$  bestimmt. Die sich daraus ergebenden 40 Präsudokus  $W_{e,3}$  sind in Liste L80e der genormten Vertikalen von Winkel-Praesudokus vom 6.Feb 2010, durch ihre vertikalen e-normierten Blockspalten notiert, alle angegeben und jedes dieser 40 Praesudokus  $W_{e,3}$  lässt sich, wie man leicht sieht, in genau einer Weise zum reduzierten e-normierten Sudoku A, also einem Sudoku in reduzierter RS-Form fortsetzen.

Das von Wolfram Jehne „Zur mathematischen Theorie der Sudokus – Ein Entwurf-“ 2008 formulierte Winkelproblem war damit elementar umfassend gelöst. Die Grafiken [B1,B2] zeigen bildliche Darstellungen der Entscheidungsbäume in den Lösungen.

Im Folgenden wird alternativ eine im März 2010 notierte elementare Bestimmung aller 40 Präsudokus auf den Winkelfiguren  $W_{e,3}$  bzw. auf  $W_{e,4}$  angegeben. Eine Grafik [B3, Feb 2011] zeigt eine bildliche Darstellungen des Entscheidungsbaums dieser Lösung.

Zur methodischen Herleitung der von Felgenhauer/Javis gefundenen  $n_{FJ} = 56 \cdot 6^6$  Blockzeilen (e,b,c)

als auch  $n_{FJ} = 56 \cdot 6^6$  Blockspalten  $V(e,b,c) = \begin{pmatrix} e \\ b \\ c \end{pmatrix}$ , die den Sudokubedingungen genügen, zeigt die

alternative Lösung etwas mehr Analogie als die zuvor beschriebenen.

### Elementare Konstruktion der e-normierten Praesudokus einer Winkelfigur

Die Konstruktion basiert auf 4 Fälle.

- 1) Die Dreiermenge  $\text{im}(b_1) = \{b_{1,1}, b_{1,2}, b_{1,3}\}$  der Zeile  $b_1$  von Block b enthält alle Ziffern der Dreiermenge  $\text{im}(e_2) = \{4,5,6\}$  der Zeile  $e_2$  vom Normblock e.
- 2) Die Dreiermenge  $\text{im}(b_1)$  der Zeile  $b_1$  von Block b enthält alle Ziffern der Dreiermenge  $\text{im}(e_3) = \{7,8,9\}$  der Zeile  $e_3$  vom Normblock e.
- 3) Die Dreiermenge  $\text{im}(b_1)$  der Zeile  $b_1$  von Block b enthält zwei Ziffern der Dreiermenge  $\text{im}(e_2) = \{4,5,6\}$  der Zeile  $e_2$  vom Normblock e.
- 4) Die Dreiermenge  $\text{im}(b_1)$  der Zeile  $b_1$  von Block b enthält zwei Ziffern der Dreiermenge  $\text{im}(e_3) = \{7,8,9\}$  der Zeile  $e_3$  vom Normblock e.

### Baumdiagramm im Fall 1

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \{4,5,6\} \subset \text{im}(b_1) \text{ neben der Zeile } e_1=(1,2,3) \text{ von } e.$$

Geordnet nach den möglichen Anordnungen der Ziffern in den Zeilen  $b_1, b_2, b_3$  von Block b unterm Normblock e.



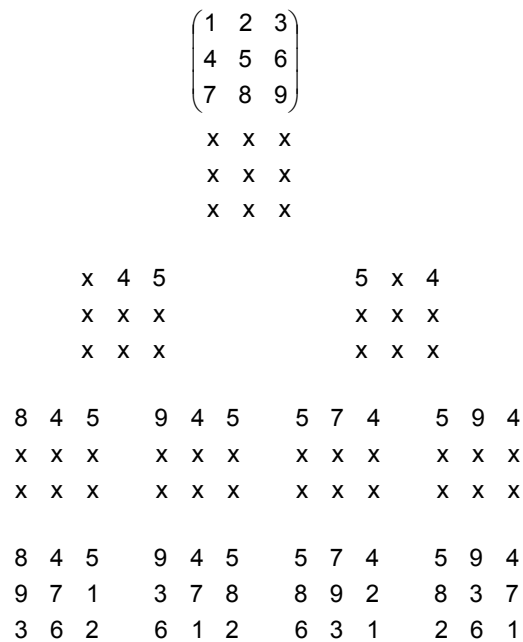
### Baumdiagramm im Fall 3

Es werden drei Unterfälle gebildet.

a)  $\{4,5\} \subset \text{im}(b_1)$ , b)  $\{4,6\} \subset \text{im}(b_1)$ , c)  $\{5,6\} \subset \text{im}(b_1)$  neben der Zeile  $e_1=(1,2,3)$  von  $e$  und abhängig von der Position der zwei Ziffern aus  $\text{im}(e_2)$  jeweils eine Ziffer aus  $\text{im}(e_3) = \{7,8,9\}$ .

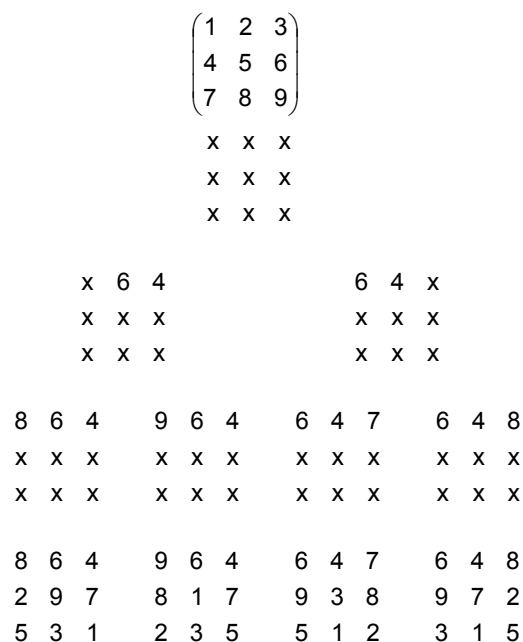
**3a)**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\{4,5\} \subset \text{im}(b_1)$  neben  $e_1=(1,2,3)$  und eine Ziffer aus  $\text{im}(e_3)$ , geordnet nach den

möglichen Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block  $b$  unterm Normblock  $e$ .



**3b)**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\{4,6\} \subset \text{im}(b_1)$  neben  $e_1=(1,2,3)$  und eine Ziffer aus  $\text{im}(e_3)$ , geordnet nach den

möglichen Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block  $b$  unterm Normblock  $e$



**3c)**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\{5,6\} \subset \text{im}(b_1)$  neben  $e_1=(1,2,3)$  und eine Ziffer aus  $\text{im}(e_3)$ , geordnet nach den möglichen Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block b unterm Normblock e .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{matrix}$$

5 6 x	6 x 5
x x x	x x x
x x x	x x x

5 6 7	5 6 8	6 7 5	6 9 5
x x x	x x x	x x x	x x x
x x x	x x x	x x x	x x x

5 6 7	5 6 8	6 7 5	6 9 5
8 9 1	3 9 7	9 1 8	2 7 8
2 3 4	2 4 1	3 4 2	3 1 4

In jedem der drei Unterfälle gibt es unter Beachtung der Sudokubedingungen 2 Möglichkeiten zur Positionierung der zwei Ziffern aus  $\text{im}(e_2)$  für die Zeile  $b_1$  und danach dann 2 Möglichkeiten zur Wahl und Positionierung einer Ziffer aus  $\text{im}(e_3)$  in der noch offenen Stelle von Zeile  $b_1$ , insgesamt also  $2 \cdot 2 = 4$  mögliche Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block b, die sich dann jeweils eindeutig in den Zeilen  $b_2, b_3$  mit den restlichen Ziffern aus  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  im Block b unterm Normblock e gemäß den Sudokubedingungen auffüllen lassen. Die Belegung der Plätze in den drei Zeilen von Block c mit Ziffern aus  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  ist danach stets eindeutig bestimmt.

Im Fall 3 mit den drei Unterfällen gibt es somit insgesamt  $3 \cdot 4 = 12$  Möglichkeiten zur Anordnung der Ziffern aus  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  in den Blöcken b und c unterm Normblock e.

#### Baumdiagramm im Fall 4

Analog zum Fall 3 werden drei Unterfälle gebildet.

a)  $\{7,8\} \subset \text{im}(b_1)$ , b)  $\{7,9\} \subset \text{im}(b_1)$ , c)  $\{8,9\} \subset \text{im}(b_1)$  neben der Zeile  $e_1=(1,2,3)$  von e und abhängig von der Position der zwei Ziffern aus  $\text{im}(e_3)$  jeweils eine Ziffer aus  $\text{im}(e_2) = \{4,5,6\}$ .

**4a)**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\{7,8\} \subset \text{im}(b_1)$  neben  $e_1=(1,2,3)$  und eine Ziffer aus  $\text{im}(e_2)$ , geordnet nach den

möglichen Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block b unterm Normblock e .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{matrix}$$

x 7 8	8 x 7
x x x	x x x
x x x	x x x

5 7 8	6 7 8	8 4 7	8 6 7
x x x	x x x	x x x	x x x
x x x	x x x	x x x	x x x
5 7 8	6 7 8	8 4 7	8 6 7
3 9 2	9 1 2	9 3 1	2 9 1
6 4 1	3 4 5	5 6 2	5 3 4

**4b)**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\{7,9\} \subset \text{im}(b_1)$  neben  $e_1=(1,2,3)$  und eine Ziffer aus  $\text{im}(e_2)$ , geordnet nach den

möglichen Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block  $b$  unterm Normblock  $e$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

x x x  
x x x  
x x x

9 7 x	x 9 7
x x x	x x x
x x x	x x x

9 7 4	9 7 5	5 9 7	6 9 7
x x x	x x x	x x x	x x x
x x x	x x x	x x x	x x x
9 7 4	9 7 5	5 9 7	6 9 7
8 1 2	3 1 8	8 3 1	2 3 8
6 3 5	6 4 2	2 6 4	5 1 4

**4c)**  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ,  $\{8,9\} \subset \text{im}(b_1)$  neben  $e_1=(1,2,3)$  und eine Ziffer aus  $\text{im}(e_2)$ , geordnet nach den

möglichen Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block  $b$  unterm Normblock  $e$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

x x x  
x x x  
x x x

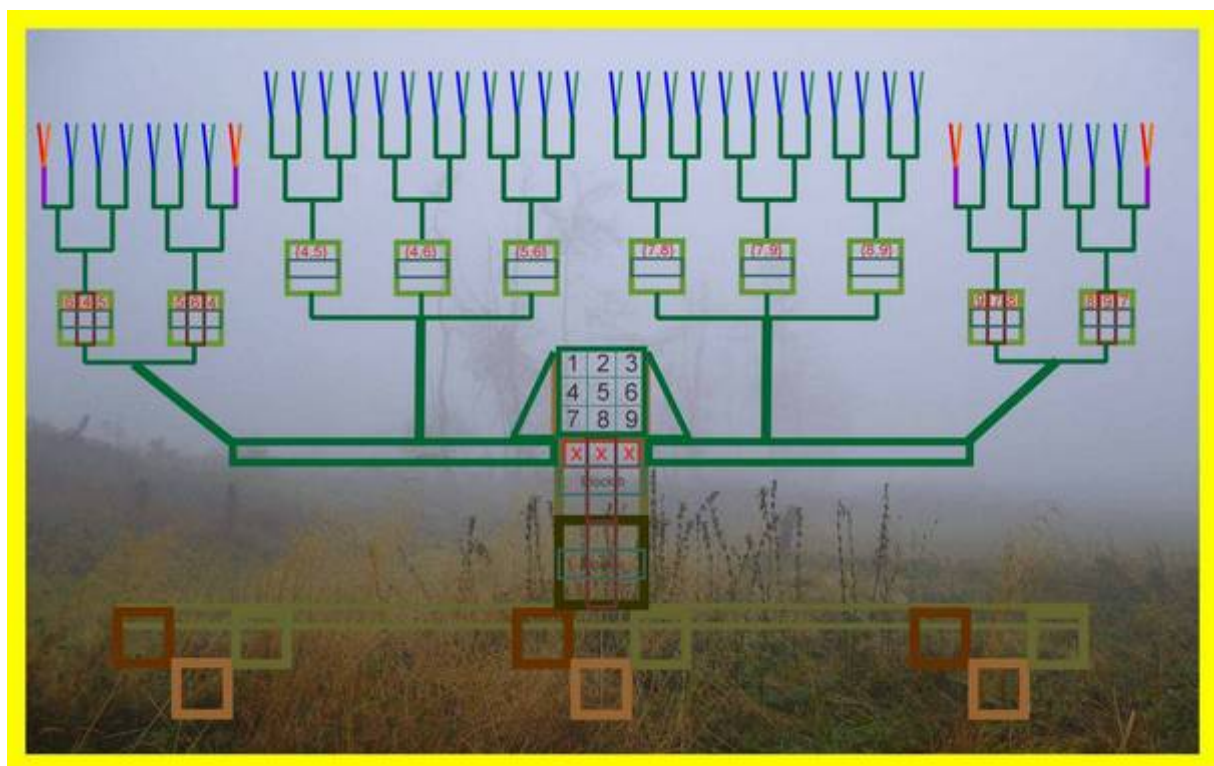
8 9 x	9 x 8
x x x	x x x
x x x	x x x

8 9 4	8 9 5	9 4 8	9 6 8
x x x	x x x	x x x	x x x
x x x	x x x	x x x	x x x
8 9 4	8 9 5	9 4 8	9 6 8
2 3 7	2 7 1	3 7 2	3 1 7
5 6 1	3 6 4	6 1 5	2 4 5

In jedem der Unterfälle gibt es unter Beachtung der Sudokubedingungen 2 Möglichkeiten zur Positionierung der zwei Ziffern aus  $im(e_3)$  für die Zeile  $b_1$  und danach dann 2 Möglichkeiten zur Wahl und Positionierung einer Ziffer aus  $im(e_2)$  in der noch offenen Stelle von Zeile  $b_1$ , insgesamt also  $2 \cdot 2 = 4$  mögliche Anordnungen der Ziffern in der Zeile  $b_1$  von Block  $b$ , die sich dann jeweils eindeutig in den Zeilen  $b_2, b_3$  mit den restlichen Ziffern aus  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  im Block  $b$  unterm Normblock  $e$  gemäß den Sudokubedingungen auffüllen lassen. Die Belegung der Plätze in den drei Zeilen von Block  $c$  mit Ziffern aus  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  ist danach stets eindeutig bestimmt. Im Fall 4 mit den drei Unterfällen gibt es somit wie im Fall 3 insgesamt  $3 \cdot 4 = 12$  Möglichkeiten zur Anordnung der Ziffern aus  $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  in den Blöcken  $b$  und  $c$  unterm Normblock  $e$ .

### Resumé

Es gibt  $8 + 8 + 12 + 12 = 40$  Möglichkeiten, ein  $e$ -normiertes Praesudoku einer Winkelfigur  $W_{e,3}$  zu bilden. Analog gibt es 40 Möglichkeiten für ein  $e$ -normiertes Praesudoku einer Winkelfigur  $W_{e,4}$ . Jedes dieser Präsudokus ist eindeutig zu einem reduzierten  $e$ -normierten Fixsudokus vom RS-Typ bzw. RSS-Typ fortsetzbar. Folglich gibt es 40 reduzierte  $e$ -normierte Fixsudokus vom RS-Typ als auch vom RSS-Typ.



Genormter Praesudoku-Baum mit elementar-kombinatorischen Wurzeln und 80 Früchten in Wolframs Garten

Abb. [B3, Feb 2011]