Die Quellen der normierten Fixsudokus

Fritz Ostermann Februar 2012

Gliederung

§1 Typen und Formen von Fixoperatoren
§2 Typen und Sorten der Fixsudokus
§3 Normierte Präsudokus und Quellenfixe der Typen RS und RSS
§4 Normierte Präsudokus und Quellenfixe der Typen R und S
§5 Bilanz der Anzahlen normierter Fixsudokus

Einleitung

In einer detaillierten Sicht auf die möglichen Typen und Formen von Operatoren der Sudokugruppe G werden Darlegungen im Skript „Die Fixsudokus der Sudokugruppe" in der dort verwendeten Terminologie ergänzt sowie gezeigt, aus welchen Quellen alle normierten Fixsudokus entspringen und deren Zahl sich ergibt. Zudem wird gezeigt aus welchen Präsudokus sich die Quellen füllen.
In §1 werden mit einem Lemma und einem Darstellungssatz die für Fixoperatoren möglichen Typen und Formen bestimmt.
In §2 wird mit dem Reduktionssatz gezeigt, dass dieses normierte Sudoku anhand eines lokalen Operators zu einem normierten Sudoku mit reduziertem Operator konjugiert ist. Damit ergibt sich, dass die normierten Fixsudokus mit reduziertem Fixoperator, kurz normierte Quellenfixe genannt, die Quelle aller normierten Fixsudokus sind.
In §3 werden mittels der Präsudokus von normierten Winkelfiguren die normierten Sudokus mit reduziertem Fixoperator abhängig vomTyp bestimmt und darin enthaltene Superfixe herausgestellt.
In §4 werden analog mittels der Präsudokus von normierten Blockzeilen sowie normierten Blockspalten die normierten Sudokus mit reduziertem Fixoperator abhängig vom Typ bestimmt als auch darin enthaltene Superfixe.
In §5 wird anhand der Ergebnisse der vorangehenden Paragrafen die Gesamtheit der normierten Fixsudokus in 5 Klassen zerlegt und deren Zahl aufaddiert.

§1 Typen und Formen von Fixoperatoren

Wir erinnern:
Die Gruppe G wird erzeugt von den je 6 „globalen" Permutationen der drei Blockzeilen und deren lokalen Permutationen ihrer Zeilen, den Permutationen der drei Blockspalten und den lokalen Permutationen derer Spalten, sowie der Transponation t der 9x9-Matrix eines Sudokus . Als Untergruppe von G ergibt sich die ohne t nur von den Permutationen erzeugte „kleine" Sudokugruppe G_0. Wir schreiben allgemein g_1, g_2, g_3 für die lokalen Zeilenpermutationen r_1= (2,3) r_2=(1,3) r_3=(1,2) r=(1,2,3) rr=(3,2,1) so wie 1 für id in den drei Blockzeilen eines Sudokus A=($A_{i,j}$) mit den Blöcken $A_{i,j}$ = ($a_{i,j,k,l}$), i, j, k, l $\in$ {1,2,3}. Analog schreiben wir allgemein h_1, h_2, h_3 für die entsprechend definierten lokalen Spaltenpermutationen s_1, s_2, s_3, s, ss $_{\text{sowie}}$ 1 für id der drei Blockspalten eines Sudokus. Die globalen Permutationen der drei Blockzeilen notieren wir analog R_1, R_2, R_3,R,RR und die der drei Blockspalten S_1, S_2, S_3, S, SS jeweils neben 1=id. Ein Element der Gruppe G schreiben wir allgemein $g_1\bullet g_2\bullet g_3 \bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet X\bullet t$, wenn es den Transponator t enthält, ansonstens schreiben wir es $g_1\bullet g_2\bullet g_3 \bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet X$. Die Produkte $g_1\bullet g_2\bullet g_3$ und $h_1\bullet h_2\bullet h_3$ sind als Tripel zu sehen und deren Produkt als Matrix ($g_i\bullet h_j$). Die Elemente der Matrix wirken auf die Blöcke eines Sudokus . Mit T(r) notieren wir die Menge der Tripel $g_1\bullet g_2\bullet g_3$, zudem mit T_{2x3}

(r) die von den Tripeln $1 \bullet g_2 \bullet g_3$ gebildete Teilmenge von T(r). Analog notieren wir die Menge der Tripel $h_1 \bullet h_2 \bullet h_3$ durch T(s) und mit T_{2x3} (s) die Menge der Tripel $1 \bullet h_2 \bullet h_3$ von T(s).Operatoren von T_{2x3} (r) permutieren die Zeilen der ersten Blockzeile nicht und T_{2x3}(s) permutieren die Spalten der ersten Blockspalte nicht.

Ein Operator $\varphi \neq id$ von G ist ein Fixoperator, wenn es ein Sudoku A gibt, das von dem Operator auf sich abgebildet wird, also $\varphi(A)=A$ ist. Solch Sudoku A wird dann Fixsudoku des Operators genannt. Die Menge aller Fixoperatoren zusammen mit der Identität id bilden dann die Fixgruppe des Sudokus A.
Nicht jedes Element von G kann Fixoperator eines Sudokus sein, denn weder der Transponator t noch jede Permutation der Blockzeilen als auch Blockspalten ist als globaler Faktor eines Fixoperators möglich.
Zudem unterliegen die Tripel lokaler Permutationen der Zeilen bzw. Spalten von Blockstreifen Bedingungen.
In Bezug auf den globalen Faktor X eines Fixoperators hat man den folgenden Satz. Nach ihm sind nur 8 Typen möglich.

Satz 1
Wenn $\varphi(A)=A$ mit $\varphi = g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet X \neq id$, so gilt
$X \in$ {R, RR, S, SS, RS, RRSS, RSS, RRS } .

Zum Beweis wird vorab gezeigt:

Die Spiegelung eines Sudokus A an der Hauptdiagonalen, d. h. der Transponator t, kann neben anderen Permutationen von Blockzeilen und -Spalten in einem Fixoperator φ aus G nicht vorkommen.
Begründung:
Wenn es einen Fixoperator $\varphi(A)$ mit einen Faktor t gibt, wäre auch φ^3 (A)=A. Damit gäbe es ein ϕ aus G_0 mit $t(A)=\phi(A)$, wobei $\phi=t \bullet \varphi^3$. Das Quadrat des globalen Faktors X^3 von ϕ wäre gleich 1, also wäre X^3 gleich 1 oder X^3 ein Erzeugnis aus Transpositionen von Blockzeilen oder Blockspalten oder beidem. Solch ein Erzeugnis hält die Lage der Blöcke in der Hauptdiagonalen nicht fest, was hingegen der Operator t ,abgesehen von der Spiegelung, tut. Allein durch die lokalen Faktoren bewirkt, d.h. falls also $X^3=1$ ist, kann ebenfalls nicht $t(A)= \phi(A)$ sein -wie man sich leicht klarmacht.
Es ergibt sich die obige Menge nun aus dem

Lemma.
Zu einem Operator $\varphi = g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet X \neq id$ mit
$X \in \{1, R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3\}$ = M1 oder
$X \in \{ R_1S_1, R_1S_2, R_1S_3, R_2S_1, R_2S_2, R_2S_3, R_3S_1, R_3S_2, R_3S_3\}$=M2 oder
$X \in \{ R_1S, R_2S, R_3S, R_1SS, R_2SS, R_3SS\}$ = M3 oder
$X \in \{ RS_1,RS_2,RS_3,RRS_1,RRS_2,RRS_3\}$=M4
gibt es kein Sudoku A derart, dass φ (A)= A.

Beweis:
Wir beginnen mit dem Fall X=1 in bezug auf ein Sudoku $A = (A_{i,j})$, $i,j \in\{1,2,3\}$, in Blockdarstellung.
Es soll $\varphi (A) = (g_i \bullet h_j(A_{i,j})) = (A_{i,j}) = A$ sein.
Das geht nur für $g_i \bullet h_j =1$ für $i,j \in \{1,2,3\}$ im Widerspruch zu $\varphi \neq id$.
Wenn X = R_1, bleibt die erste Blockzeile fest und die anderen beiden tauschen die Plätze. Es soll sein $\varphi ((A_{i,j}))= (A_{i,j})$, speziell also
$g_1 \bullet h_1A_{1,1} = A_{1,1}$, das $g_1= h_1=1$ bedingt, und zudem $g_2 \bullet h_1 A_{3,1}= A_{2,1}$, was bei h_1=1 den Sudokubedingungen für A widerspricht , denn in lokalen Spalten der ersten Blockspalte von Sudoku A stünden wegen h_1=1 gleiche Ziffern.
Wenn X = S_1, bleibt die erste Blockspalte fest und die anderen beiden tauschen die Plätze. Es soll sein $\varphi ((A_{i,j}))= (A_{i,j})$, speziell also

$g_1\bullet h_1A_{1,1} = A_{1,1}$, das $g_1= h_1=1$ bedingt, und zudem hier nun $g_1\bullet h_2 A_{1,3}= A_{1,2}$, was bei $g_1=1$ den Sudokubedingungen für A widerspricht , denn in lokalen Zeilen der ersten Blockszeile von Sudoku A stünden wegen $g_1=1$ gleiche Ziffern.

Die Fälle $X=R_2$, $X= R_3$ aus M1 sind durch
$\varphi(A)=A \Leftrightarrow R\varphi RR(RA) = RA \Leftrightarrow RR\varphi R(RRA)$ zum Fall $X= R_1$ logisch äquivalent , analog die Fälle $X=S_2$, $X= S_3$ zum Fall $X=S_1$ durch
$\varphi(A)=A \Leftrightarrow S\varphi SS(SA) = SA \Leftrightarrow SS\varphi S(SSA)$.

Wenn $X = R_1S_1$, bleiben die erste Blockzeile und die erste Blockspalte fest und die jeweils beiden anderen Zeilen und Spalten tauschen die Plätze. Es soll sein $\varphi((A_{i,j}))= (A_{i,j})$, speziell also, wie zuvor $g_1\bullet h_1A_{1,1} = A_{1,1}$, das $g_1= h_1=1$ bedingt, und zudem $g_2\bullet h_1 A_{3,1}= A_{2,1}$ und $g_1\bullet h_2 A_{1,3}= A_{1,2}$ was sowohl mit $h_1=1$ als auch mit $g_1=1$ den Sudokubedingungen für A widerspricht aus Gründen wie oben.

Die übrigen 8 Fälle mit X aus $M2=\{ R_1S_1, R_1S_2, ..., R_3S_3\}$ sind durch
$\varphi(A)=A \Leftrightarrow Y\varphi Y^{-1}(YA) = Y(A)$ mit Y aus {R, RR, S, SS, RS , RSS; RRS, RRSS} zum Fall $X= R_1S_1$ logisch äquivalent .

Wenn X aus $M_3=\{ R_1S, ..., R_3SS\}$ oder X aus $M_4=\{ RS_1,...,RRS_3\}$ schließt man analog zu oben von $\varphi(A)=A$ mit der dritten Potenz von φ auf $\varphi^3(A) = A$. Der globale Faktor solch eines Operators φ^3 ist eine Transposition aus der Menge M1 ohne {1} und führt anhand der anfangs betrachteten Fälle für X aus M_1 zum Widerspruch.
Neben dem anfänglichen Ausschluss eines Operators $\varphi\neq$id mit einem globalen Faktor X=1 ist folgender Sachverhalt gezeigt:
Zu einem Operator $\varphi\neq$id der Sudokugruppe mit einem globalen Faktor X, der eine Transposition enthält, kann es kein Sudoku A geben ,sodass $\varphi(A)=A$ ist.
Anders gesagt:
nur zu Operatoren mit einem globalen Faktor X aus dem Komplement der Vereinigung der Mengen M_1,M_2,M_3,M_4 ,also $X \in$ {R, RR, S, SS, RS, RRSS, RSS, RRS } kann es ein Sudoku A mit $\varphi(A)=A$ geben.

Der herausgestellte Sachverhalt lässt sich weniger detailliert auch mit folgender Argumentation begründen:

Wenn φ ein Operator mit einer Transposition mit globalem Faktor X und A ein Sudoku ist, derart, dass $\varphi(A)=A$, dann ist $\phi=\varphi^3$ ein Operator mit einem Faktor X der Ordnung 2, also eine Transposition oder ein Produkt zweier Tranpositionen und es gilt $\phi(A)= A$. Im Sudoku A $=(A_{i,j})$, i,j=(1,2,3) wird dann in mindestens einem Blockstreifen in einem Blockpaar das durch ϕ bewirkte Bild gleich seinem Partner sein. Und es gibt in der Blockreihe einen Block $A_{i,j}$ der durch ϕ auf sich abgebildet wird,also lokale Operatoren g_i,h_j derart, dass $g_i,h_j A_{ij}=A_{i,j}$ ist. Also ist $g_i=h_j=1$. In lokalen Reihen des Blockstreifens kämen gleiche Ziffern vor. Das widerspricht den Sudokubedingungen für A.

Mögliche Formen für Fixoperatoren
Die Tripel lokaler Permutationen eines Fixoperators sind nicht beliebig wählbar. Es ergeben sich in Abhängigkeit vom lokalen Faktor X eines Fixoperators φ notwendige Bedingungen. Man hat 8 Implikationen.Dazu notieren wir die Menge aller Sudokus durch X

Darstellungssatz.
$\ni A\subset \mathrm{X}\ \ g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3\bullet R(A)=A \Rightarrow g_3\bullet g_2\bullet g_1=1$ und $h_1,h_2,h_3 \in \{s,ss\}$
$\ni A\subset \mathrm{X}\ \ g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3\bullet RR(A)=A \Rightarrow g_1\bullet g_2\bullet g_3=1$ und $h_1,h_2,h_3 \in \{s,ss\}$

$\ni A\subset \mathrm{X}\ \ g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3\bullet S(A)=A \Rightarrow g_1,g_2,g_3 \in \{r,rr\}$ und $h_3\bullet h_2\bullet h_1=1$

$\ni A \subset X \;\; g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet SS(A)=A \Rightarrow g_1,g_2,g_3 \in \{r,rr\}$und $h_1 \bullet h_2 \bullet h_{3=}\ 1$

$\ni A \subset X \;\; g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet RS(A)=A \Rightarrow g_3 \bullet g_2 \bullet g_1=1$ und $h_3 \bullet h_2 \bullet h_1=1$ $\ni A \subset X$
$g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet RRSS(A)=A \Rightarrow g_1 \bullet g_2 \bullet g_3=1$ und $h_1 \bullet h_2 \bullet h_3=1$

$\ni A \subset X \;\; g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet RSS(A)=A \Rightarrow g_3 \bullet g_2 \bullet g_1=1$ und $h_1 \bullet h_2 \bullet h_3=1$
$\ni A \subset X \;\; g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet RRS(A)=A \Rightarrow g_1 \bullet g_2 \bullet g_3=1$ und $h_3 \bullet h_2 \bullet h_1=1$

1 T(SS). Die Beweise dieser Implikationen sind für $X \in \{R,S,RS,RSS\}$ im Skript [1] dargelegt und ergeben sich in den anderen Fällen analog. Man kann sie auch leicht dem Sachverhalt φ^3 =id von Fixoperatoren entnehmen.

Die Mengen der Tripel mit einem Komponentenprodukt gleich eins notieren wir T(R), T(RR), T(S), T(SS). Sie enthalten jeweils 36 Tripel.
Liste der Menge T(R) lokaler Tripel $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3$ mit $g_3 \bullet g_2 \bullet g_1=1$
$1 \bullet 1 \bullet 1$, $r \bullet r \bullet r$, $rr \bullet rr \bullet rr$
$1 \bullet r_1 \bullet r_1$, $1 \bullet r_2 \bullet r_2$, $1 \bullet r_3 \bullet r_3$, $1 \bullet r \bullet rr$, $1 \bullet rr \bullet r$,
$r_1 \bullet 1 \bullet r_1$, $r_2 \bullet 1 \bullet r_2$, $r_3 \bullet 1 \bullet r_3$, $r \bullet 1 \bullet rr$, $rr \bullet 1 \bullet r$,
$r_1 \bullet r_1 \bullet 1$, $r_2 \bullet r_2 \bullet 1$, $r_3 \bullet r3 \bullet 1$, $r \bullet rr \bullet 1$, $rr \bullet r \bullet 1$
$r_1 \bullet r_3 \bullet r$, $r_1 \bullet r_2 \bullet rr$, $r_2 \bullet r_3 \bullet rr$, $r_3 \bullet r_2 \bullet r$, $r_3 \bullet r_1 \bullet rr$, $r_2 \bullet r_1 \bullet r$
$r_1 \bullet r \bullet r_2$, $r_1 \bullet rr \bullet r_3$, $r_2 \bullet r \bullet r_3$, $r_3 \bullet rr \bullet r_2$, $r_3 \bullet r \bullet r_1$, $r_2 \bullet rr \bullet r_1$
$rr \bullet r_1 \bullet r_2$, $r \bullet r_1 \bullet r_3$, $rr \bullet r_2 \bullet r_3$, $r \bullet r_3 \bullet r_2$, $rr \bullet r_3 \bullet r_1$, $r \bullet r_2 \bullet r_1$

Die Liste von T(RR) der 36 Tripel $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3$ mit $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3=1$ stimmt in den ersten 18 Trippeln mit den voranstehenden überein. In den restlichen 18 Trippeln ist die Position der Transpositionen getauscht.

Die Listen von T(S), T(SS) der Tripel $h_1 \bullet h_2 \bullet h_3$ mit $h_3 \bullet h_2 \bullet h_1=1$ bzw. $h_1 \bullet h_2 \bullet h_3=1$ sind entsprechen denen der Tripel $g_1 \bullet g_2 \bullet g_3$.

Reduzierte Fixoperatoren

Operatoren der Sudokugruppe G, die alle lokalen Zeilen fest lassen und alle lokalen Spalten zyklisch verschieben oder alle lokalen Spalten fest lassen und alle Zeilen zyklisch verschieben, nennen wir R-reduziert bzw. S-reduziert .
Operatoren, die sowohl alle lokalen Zeilen als auch alle lokalen Spalten fest lassen, nennen wir „ totalreduziert “. In der Darstellung reduzierter Operatoren kommt also das Tripel $1 \bullet 1 \bullet 1$ mindestens einmal vor und daneben ggf. nur Tripel mit Spaltenverschiebungen $h_1,h_2,h_3 \in \{s,ss\}$ oder Tripel mit Zeilenverschiebungen $g_1,g_2,g_3 \in \{r,rr\}$,

Formen reduzierter Fixoperatoren
Folgende Formen reduzierter Fixoperatoren sind möglich:
$\varphi^*=1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet R$,
$\varphi^*=1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet h_1 \bullet h_2 \bullet h_3 \bullet RR$, wobei $h_1,h_2,h_3 \in \{s,ss\}$,
$\varphi^*=g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet S$,
$\varphi^*=g_1 \bullet g_2 \bullet g_3 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet SS$, wobei $g_1,g_2,g_3 \in \{r,rr\}$
$\varphi^*= 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet RS$
$\varphi^*= 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet RRSS$
$\varphi^*= 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet RSS$
$\varphi^*= 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet RRS$

§2 Typen und Sorten der Fixsudokus

Eine besondere Bedeutung bei der Konstruktion aller Fixsudokus bekommen die reduzierten Fixoperatoren durch folgenden

Reduktions-Satz.
Es sei $\varphi(A)=A$, $\varphi \neq id$ aus G, A aus X, X Menge aller Sudokus.
Es gibt dann einen Reduktions-Operator $w \in T_{2x3}(r)xT_{2x3}(s)$ derart, dass der zu φ konjugierte Operator $\varphi^*=w\bullet\varphi\bullet w^{-1}$ ein reduzierter Fixoperator für das transformierte Sudoku wA ist, also $\varphi^*(wA)=wA$ gilt.
Der lokale Operator w hängt vom Fixoperator wie folgt ab.
Wenn $\varphi=g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet X$, X aus{R,RR,S,SS,RS,RRSS,RSS,RRS}, dann gilt:
$X=R \Rightarrow\ w(g_1\bullet g_2\bullet g_3) =1\bullet (g_1\bullet g_3)\bullet g_1 \in T_{2x3}(r) \in T(r)$
$X=RR \Rightarrow\ w(g_1\bullet g_2\bullet g_3) =1\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2) \in T_{2x3}(r)$
$X=S \Rightarrow w(h_1\bullet h_2\bullet h_3)=1\bullet (h_3\bullet h_1)\ h_1 \in T_{2x3}(s) \in T(s)$
$X=SS \Rightarrow w(h_1\bullet h_2\bullet h_3)= 1\bullet h_1\bullet(h_1\bullet h_2) \in T_{2x3}(s)$
$X=RS \Rightarrow w(g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3)=1\bullet(g_1\bullet g_3)\bullet g_1\bullet 1\bullet(h_3\bullet h_1)\bullet h_1 \in$
$T_{2x3}(r)xT_{2x3}(s)$
$X=RRSS \Rightarrow w(g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3) =1\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2)\bullet 1\bullet h_1\bullet(h_1\bullet h_2) \in T_{2x3}(r)xT_{2x3}(s)$
$X=RSS \Rightarrow w(g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3)=1\bullet(g_3\bullet g_1)\bullet g_1\bullet 1\bullet h_1\bullet(h_1\bullet h_2) \in T_{2x3}(r)xT_{2x3}(s)$
$X=RRS \Rightarrow w(g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3)=1\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2)\bullet 1\bullet(h_3\bullet h_1)\bullet h_1 \in T_{2x3}(r)xT_{2x3}(s)$

Die Zuordnungen eines Operators w für Tripel von $\varphi=g_1\bullet g_2\bullet g_3\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet X$ sind surjektiv und umkehrbar.

Beweis.

Anhand der Vertauschungsregeln für globale Faktoren entnimmt man dem Produkt $\varphi^*=w\bullet\varphi\bullet w^{-1}$ leicht, dass es einen reduzierten Operator darstellt. Wenn X=R, ist $w^{-1} = 1\bullet g_2\bullet(g_3\bullet g_2)$ und man rechnet wie folgt:

$\varphi^* = 1\bullet(g_1\bullet g_3)\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2\bullet g_3)\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet R\bullet 1\bullet g_2\bullet(g_3\bullet g_2)$
$\quad = 1\bullet(g_1\bullet g_3)\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2\bullet g_3)\bullet(g_3\bullet g_2)\bullet 1\bullet g_2\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet R$
$\quad =1\bullet 1\bullet 1\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet R.$

Im Fall RR hat man $w^{-1} =1\bullet(g_2\bullet g_3)\bullet g_3$ und rechnet
$\varphi^* = 1\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2)\bullet(g_1\bullet g_2\bullet g_3)\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet R\bullet 1\bullet(g_2\bullet g_3)\bullet g_3$
$\quad = 1\bullet g_1\bullet(g_1\bullet g_2)\bullet(g_1\bullet g_2\bullet g_3)\bullet(g_2\bullet g_3)\bullet g_3\bullet 1\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet R$
$\quad =1\bullet 1\bullet 1\bullet h_1\bullet h_2\bullet h_3 \bullet R.$

Durch analoge Rechnungen beweist man die übrigen sechs Fälle.

Die Zuordnung ist surjektiv, da das Produkt der gezogenen Tripel in der definierten Reihenfolge 1 ist. Die Zuordnung ist umkehrbar, da die im Term von w nicht auftretenden Variablen der bezogenen Tripel des Definitionsbereichs eindeutig anhand der im Term auftretenden Variablen rekonstruierbar sind.

In der Beweisargumentation ist folgendes zu bedenken.
Definitionsbereiche für die Zuordnungen von w sind die Tripel- Mengen T(R), T(RR), T(S) sowie deren direkte Produkte.

Die Umkehrbarkeit zeigt sich auch durch einen Anzahlvergleich. Sowohl Definitionsmenge als auch Wertmenge der Zuordnung w
umfassen jeweils 36 bzw. 36x36 Tripel.

Normierte Sudokus.

Wir nennen ein Sudoku $A=(A_{i,j})$ mit $i,j \in \{1,2,3\}$ normiert, wenn der Block $A_{1,1}$ der Normblock

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Durch eine Permutation der Ziffern aus {1,2,3,4,5,6,7,8,9,} kann man jedes Sudoku A in ein normiertes Sudoku transformieren und umgekehrt aus dem normierten das Urbild zurückgewinnen.

Das Bild wA eines normierten Sudokus A unter dem Reduktionsfaktor w ist ebenfalls ein normiertes Sudoku. Es gilt folgendes:

Zusatz zum Reduktionssatz

Es sei w der Reduktionsoperator eines Fixoperators $\neq$ id von A und w^{-1} seine Umkehrung. Dann gilt für Fixsudokus: wenn A normiert, so ist A*= wA normiert.
Wenn A* normiert ist, dann ist w^{-1}A* normiert.

Beweis.
Der Reduktionsoperator w lässt die erste Blockzeile oder Blockspalte oder beide Blockreihen fest. Damit wird der Normblock von A auf sich abgebildet.
Der Operator w ist umkehrbar. Die Umkehrung w^{-1} bildet ebenfalls mindestens eine der genannten Blockreihen auf sich ab. Eine Normierung im Sudoku wA bleibt erhalten.

Quellenfixe.

Ein Fixsudoku, das einen reduzierten Fixoperator hat, wird Quellenfix genannt.

Nach dem Reduktionssatz hat jedes normierte Fixsudoku A ein lokal transformiertes Bild in der Menge Ω_e der normierten Quellenfixe und umgekehrt ist jedes normierte Fixsudoku als lokal transformiertes Bild eines normierten Quellenfix darstellbar.

Die Menge Ω_e aller normierten Quellenfixe ist Quelle aller Fixsudokus. Jedes normierte Fixsudoku ist anhand der Umkehrung w^{-1} als Bild eines normierten Quellenfix darstellbar. Zuflüsse zu den normierten Quellenfixen erfolgen, abängig vom Typ ihrer Fixoperatoren, aus den überschaubaren Mengen der normierten Präsudokus von Winkelfiguren und Blockstreifenfiguren.

Sorten der Fixsudokus

Mit zwei Fixoperatoren eines Sudokus A ist auch deren Produkt ein Fixoperator von A.

Zudem gibt es nach dem Lemma in §1 nur 8 mögliche globale Faktoren eines Fixoperators von A. Die Ordnung der Fixgruppe eines Sudokus A kann mit dem Einschluss von id nur 3 oder 9 sein. Normale Fixsudokus nennen wir jene Sudokus, die genau 2 Fixoperatoren $\neq$id haben, superfixe Fixsudokus, kurz Superfixe genannt, sind jene,die 8 Fixoperatoren $\neq$ id haben.

Typen der Fixsudokus.

Abhängig von den Fixoperatoren, die ein Sudoku hat, notieren wir 4 Typen:
R-Typ, S-Typ, RS-Typ sowie RSS-Typ.
Superfixe gehören zu jedem Typ. Bei normalen Fixsudokus sind die globalen Faktoren ihrer Fixoperatoren jeweils das Quadrat des anderen.
Da mit einem Fixoperator φ eines Sudokus A auch φ^2 Fixoperator von A ist, reduzieren sich die 8 möglichen Typen von Fixoperatoren auf die 4 oben genannten Fixsudokutypen.

Die Unterscheidung von Sorten und Bezeichnung von Typen bei Fixsudokus gilt insbesondere für normierte Quellenfixe.

§3 Normierte Präsudokus und Quellenfixe der Typen RS und RSS

Normierte Quellenfixe, vom RS-Typ, haben notwendig folgende Blockmatrizenform:

$$\begin{pmatrix} e & b & c \\ c & e & b \\ b & c & e \end{pmatrix}$$

Normierte Quellenfixe, vom RSS-Typ, haben notwendig die Blockmatrizenform:

$$\begin{pmatrix} e & b & c \\ b & c & e \\ c & e & b \end{pmatrix}$$

Es gibt 40 normierte Quellenfixe vom RS-Typ. Sie sind eindeutige Fortsetzungen zu Fixsudokus vom RS-Typ der Präsudokus der folgenden normierten Winkelfigur.

$$\begin{pmatrix} e & b & c \\ c & * & * \\ b & * & * \end{pmatrix}.$$

Analog gibt es 40 normierte Quellenfixe vom RSS-Typ. Diese sind eindeutige Fortsetzungen der normierten Winkelfigur .

$$\begin{pmatrix} e & b & c \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix}.$$

Gegenüber der Winkelfigur vom RS-Typ hat man also in der Blockspalte eine getauschte Reihenfolge der Blöcke b,c.

Das folgende Bild zeigt den kombinatorischen Entscheidungsbaum der Präsudokus für normierte Quellenfixe der Typen RS als auch RSS. Die Reihenfolge der b,c-Blöcke in der normierten Spalte spielt bei den Entscheidungen keine Rolle.

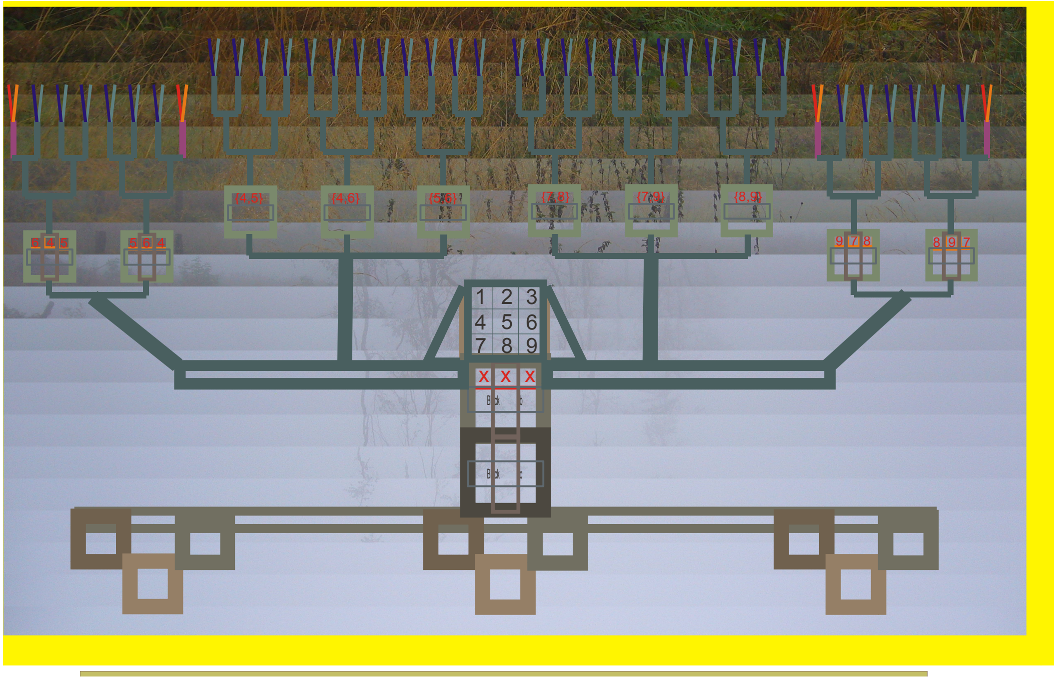

Abb.1   Kombinatorischer Entscheidungsbaum zur Erstellung der $n_{As}=2\bullet(2^3+3\bullet2^2) = 40$ Präsudokus einer normierten Winkelfigur. Abhängig von der Stellung der Blöcke b,c in der hier nicht gezeigten Spalte der Winkelfigur erhält man Präsudokus entweder vom Typ RS oder RSS.

Die einzelnen Schritte sind auf der Homepage im Skript „Präsudokus einer Winkelfigur“ dargelegt. Die aus den Präsudokus sich ergebende Menge der 40 normierten Quellenfixe vom RS-Typ ist auf der Homepage durch die Listen L36eee und L4eee angegben.

Superfixe Quellenfixe zum RS-Typ

Zu der Menge der 40 normierten Quellenfixe vom RS-Typ gehören die von Arnold Schönhage entdeckten 4 normierten superfixen Quellenfixe. Es sind dies

$$\mathrm{U1}=\begin{pmatrix} e & rrsse & rse \\ rse & e & rrsse \\ rrsse & rse & e \end{pmatrix},\ \mathrm{U2}=\begin{pmatrix} e & rse & rrsse \\ rrsse & e & rse \\ rse & rrsse & e \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{U3}=\begin{pmatrix} e & rsse & rrse \\ rrse & e & rssee \\ rsse & rrse & e \end{pmatrix},\qquad \mathrm{U4}=\begin{pmatrix} e & rrse & rsse \\ rsse & e & rrse \\ rrse & rsse & e \end{pmatrix}.$$

von der Liste L4eee.

Sie haben neben dem reduzierten Fixoperator RS auch Fixpoeratoren von jedem anderen Typ. Ihre Fixgruppen umfassen 9 Operatoren und sind im Skript 1 angegeben.
Den aus den 40 Präsudokus der normierten Winkelfigur vom RS-Typ zuströmenden 40 normierten Quellenfixe vom RS-Typ entspringen nach dem Reduktionssatz 36•36•40 normierte Fixsudokus vom RS-Typ, darunter 36•36•4 normierte Superfixe neben den restlichen 36•36•36 normierten normalen Fixsudokus vom RS-Typ.

Normierte Quellenfixe vom RSS-Typ

Aus den 40 Präsudokus der normierten Winkelfigur vom RSS-Typ fließen eindeutig 40 normierte Quellenfixe dieses Typs , darunter die vier normierten superfixen Quellenfixe $U_1' = R_1U_1$, $U_2'=R_1U_2$, $U_3'=R_1U_3$, $U'_4=R_1U_4$..Und diesen Quellen entspringen analog nach dem Reduktionssatz 36•36•40 normierte Fixsudokus vom RSS-Typ, darunter mengengleich zum RS-Typ 36•36•4 normierte Superfixe. Zudem ergeben sich 36•36•36 normierte normale Fixsudokus vom RSS-Typ.

§4 Normierte Präsudokus und Quellenfixe der Typen R und S

Normierte Quellenfixe vom R-Typ, haben notwendig folgende Blockmatrizenform

$$\begin{pmatrix} e & b & c \\ h_1e & h_2b & h_3c \\ h_1h_1e & h_2h_2b & h_3h_3c \end{pmatrix}$$

wobei h_1,h_2,h_3 aus {s,ss} sind
.
Normierte Quellenfixe, vom S-Typ, haben notwendig die Blockmatrizenform:

$$\begin{pmatrix} e & g_1e & g_1g_1e \\ b & g_2b & g_2g_2b \\ c & g_3c & g_3g_3c \end{pmatrix}$$

wobei g_1,g_2,g_3 aus {r,rr}.

Es gibt $n_F = 6^6 \bullet(2\bullet3^3+2)= 36\bullet36\bullet36\bullet56$ Präsudokus (e,b,c) einer normierten Blockzeile und für jedes Präsudoku durch Wahl der h_1,h_2,h_3 aus {s,ss} 8 Möglichkeiten es zu einem normierten Quellenfix vom R-Typ fortzusetzen. Damit gibt es $8\bullet n_F$ normierte Quellenfixe vom R-Typ.

Analog gibt es $8\bullet n_F$ normierte Quellenfixe vom S-Typ. Sie ergeben sich aus den jeweils 8 möglichen Fortsetzungen der Präsudokus einer normierten Blockspalte durch Wahl von g_1,g_2,g_3 aus {r,rr}.

Die Abbildung 2 zeigt den Entscheidungsbaum zur Erstellung der $n_F=36^3\bullet56$ vielen Präsudokus einer normierten Blockzeile und damit eine Begründung der von Felgenhauer gefunden Zahl.

Erläuterungen zum Bild
Die aus dem Stamm wachsenden 4 Äste zerlegen die Menge aller Präsudokus einer e-normierten Blockzeile (e,b,c) in vier Teilmengen. An den äußeren Ästen hat das Plazieren der Ziffern 4, 5, 6 sowie von 7,8,9 in die oberste 3er-Menge von Block b eine eindeutige Verteilung aller weiteren Ziffern im Block b als auch aller Ziffern auf die Zeilen von Block c

zur Folge. Die durch Sudokubedingungen nicht eingeschränkte Wahl der Ziffernreihenfolge in den sechs 3er-Mengen liefert somit $2 \times 6^6 = 2 \times 466656$ Präsudokus . Für das Plazieren von jeweils zwei Ziffern von 4,5,6 im links-mittigen Ast als auch von 7,8,9 im rechts-mittigen Ast in die oberste 3er-Menge von Block b gibt es jeweils 3 Möglichkeiten. Links verteilt man zunächst die Ziffern 7,8,9 und dann 1,2,3 , rechts die Ziffern 4,5,6 und dann 1,2,3. Wie man sich leicht überlegt, bleiben danach dann jeweils noch zwei Schritte mit je 3 Möglichkeiten, um die restlichen 6 Ziffern in Block b zu plazieren. Das Plazieren der Ziffern in Block c ist danach eindeutig .

Auf diese Weise ergeben sich $2 \times 3^3 = 54$ Zweige, in denen die Anordnung der Ziffern der sechs 3er-Mengen frei wählbar ist.

An den 4 Ästen des Baumes mit seinen insgesamt 2+ 54 = 56 Zweigen gibt es somit
56 x 46656 = 2 612 736 Präsudokus .

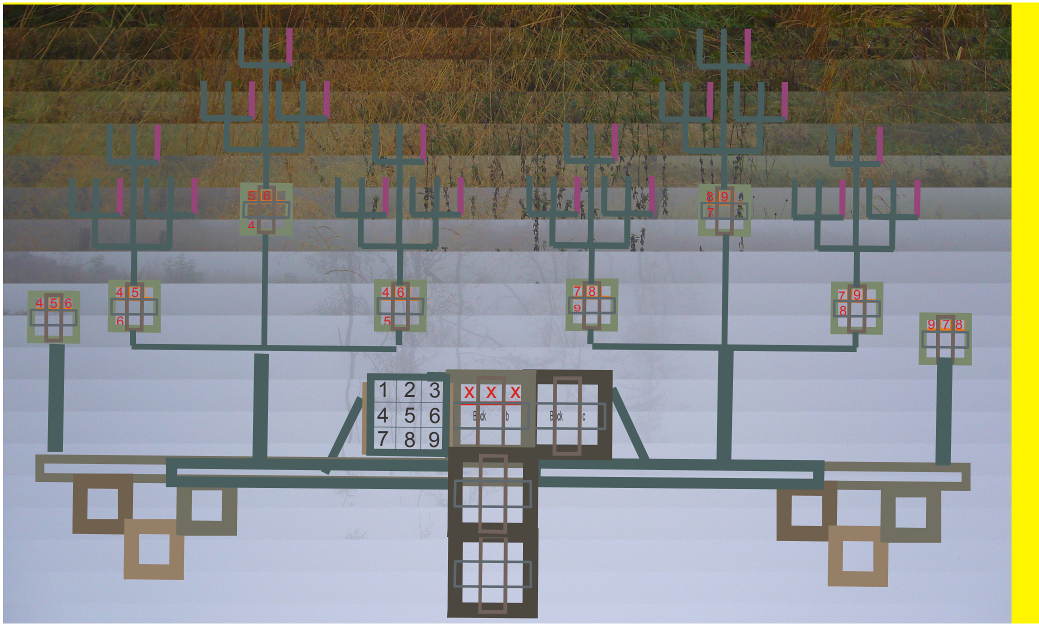

Abb.2 Kombinatorischer Entscheidungsbaum zur Erstellung der
$n_F = 6^6 \bullet(2\bullet 3^3+2)= 36\bullet 36\bullet 36\bullet 56$ Präsudokus (e,b,c) einer normierten Blockzeile.

Unter den $8\bullet n_F$ normierten Quellenfixen vom R-Typ befinden sich die normierten R-reduzierten Superfixe.

$$U_1^*=1\bullet rr\bullet r\ U_1=\begin{pmatrix} e & rrsse & rse \\ se & rre & rsse \\ sse & rrse & re \end{pmatrix},\quad U_2^*=1\bullet r\bullet rr\ U_2=\begin{pmatrix} e & rse & rrsse \\ sse & re & rrse \\ se & rsse & rre \end{pmatrix},$$

$$U_3^*=1\bullet r\bullet rr\ U_3=\begin{pmatrix} e & rsse & rrse \\ se & re & rrssee \\ sse & rse & rre \end{pmatrix},\quad U_4^*=1\bullet rr\bullet r\ U_4=\begin{pmatrix} e & rrse & rsse \\ sse & rre & rse \\ se & rrsse & re \end{pmatrix}.$$

Ihnen entfließen nach dem Reduktionssatz 36•36•4 normierte Superfixe vom R-Typ. Sie sind Teil der insgesamt 36•8•n_F normierten Fixsudokus vom R-Typ, die nach dem Reduktionssatz aus dem 8•n_F Quellenfixen vom R-Typ entspringen.

Analog hat man 8•n_F normierte Quellenfixe vom S-Typ und in diesen befinden sich die normierten S-reduzierten Superfixe. Es sind dies .

U_1^{**}=1•s•ss U_1= $\begin{pmatrix} e & rre & re \\ rse & se & rrse \\ rrsse & rsse & sse \end{pmatrix}$, U_2^{**}=1•ss•s U_2= $\begin{pmatrix} e & re & rre \\ rrsse & sse & rsse \\ rse & rrse & se \end{pmatrix}$,

U_3^{**}=1•s•ss U_3= $\begin{pmatrix} e & re & rre \\ rrse & se & rse \\ rsse & rrsse & sse \end{pmatrix}$, U_4^{**}=1•ss•s U_4= $\begin{pmatrix} e & rre & re \\ rsse & sse & rrsse \\ rrse & rse & se \end{pmatrix}$.

Ihnen entfließen analog nach dem Reduktionssatz 36•36•4 normierte Superfixe vom S-Typ. Sie sind Teil der insgesamt 36•8• n_F normierten Fixsudokus vom S-Typ, die nach dem Reduktionssatz aus dem 8•n_F Quellenfixen vom S-Typ entspringen.

§5 Bilanz der Anzahlen normierter Fixsudokus

Nach dem Voranstehenden gibt es N_R= 36•8•36•36•36•56 normierte Fixsudokus vom R-Typ
N_S= 36•8•36•36•36•56 normierte Fixsudokus vom S-Typ
N_{RS}=36•36•40 normierte Fixsudokus vom RS-Typ
N_{RSS}=36•36•40 normierte Fixsudokus vom RSS-Typ
In jeder dieser Mengen sind mitgezählt all die N_{sf} = 36•36•4 normierten Superfixe, die sich mengengleich aus den angeführten jeweils 4 normierten Quellenfixen typabhängig nach dem Reduktionssatz ergeben.
Es bietet sich an die Menge der normierten Fixsudokus, nach Sorten und Typen getrennt,in 5 Klassen zu zerlegen.
X_1= Menge der normierten normalen Fixsudokus vom R-Typ
X_2= Menge der normierten normalen Fixsudokus vom S-Typ
X_3= Menge der normierten normalen Fixsudokus vom RS-Typ
X_4= Menge der normierten normalen Fixsudokus vom RSS-Typ
X_5= Menge der normierten Superfixe
Die Kardinalzahlen dieser Mengen sind:
X_1= N_R– N_{sf}= 36•36• (8•36•36•56-4)=36•36• 580 604
X_2= N_S– N_{sf}= 36•36•(8•36•36•56-4)=36•36•580 604
X_3= N_{RS}– N_{sf}= 36•36• (40-4)=36•36•36=46 656
X_4= N_{RSS}– N_{sf}= 36•36• (40-4)=36•36•36=46 656
X_5 = N_{ss}= 36•36•4=5 184.
Die Summe der 5 Kardinalzahlen liefert die Zahl der normierten Fixsudokus der Sudokugruppe. Man erhält
N= 36•36•1 161 284
Es ist die von Arnold Schönhage computergestützt ermittelte Anzahl.

. Skripten der Homepage www. f-ostermann.de

[1] Die Fixsudokus der Sudokugruppe

[2] Präsudokus einer Winkelfigur
[3] Liste L36eee
[4] Liste L4eee
[5] Die Fixsudokus der Liste L36eee
Hintergrund der Abbildung:
Foto der Wasserkuppe von Jörg Ostermann