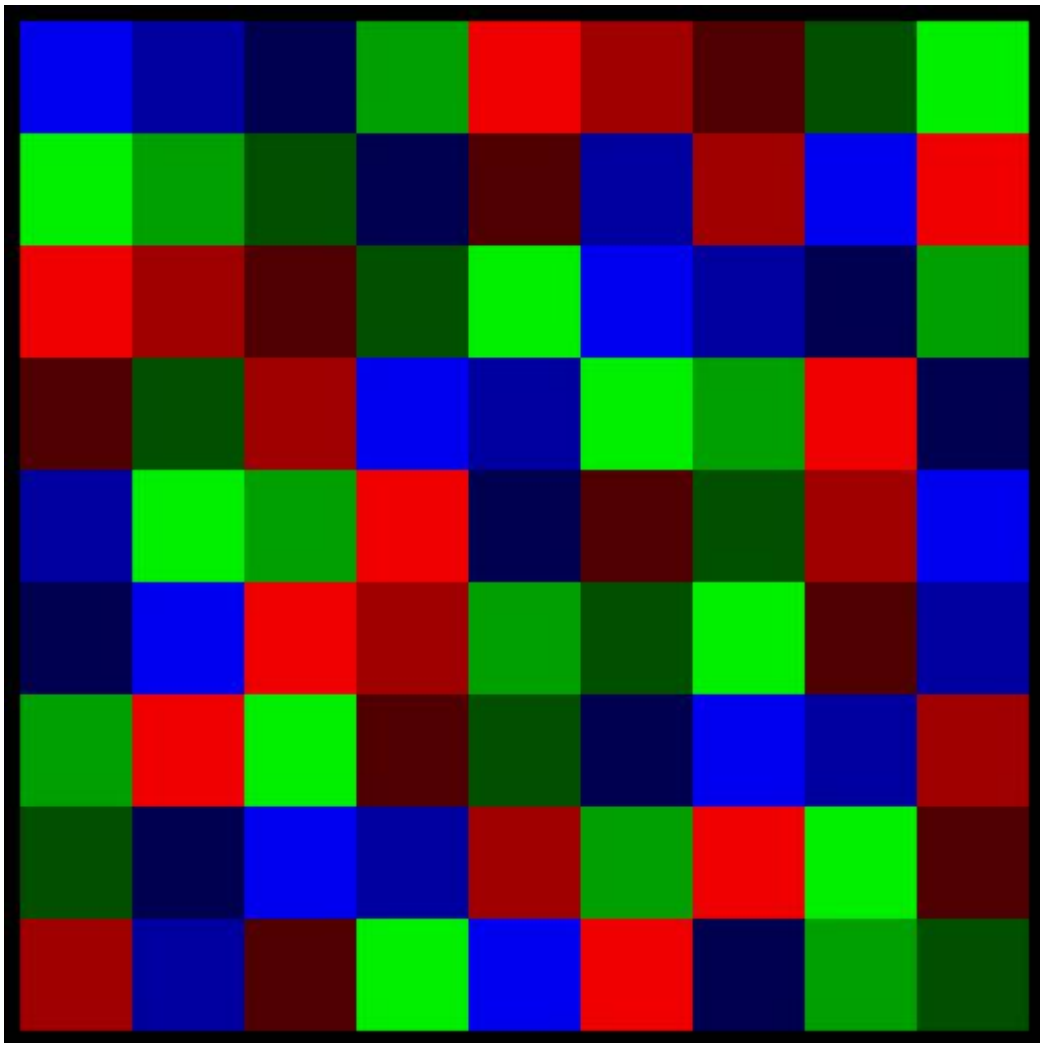


# Extreme Muster



# Extreme Muster

Ergänzung zum Skript **Sudoku-Ornamente** auf der homepage [www.f-ostermann.de](http://www.f-ostermann.de)

November 2013 (Korr. Juni 2014)

Vorbemerkung:

Als ich Anfang September 2013 nach einem Sudoku mit 27 verschiedenen horizontalen und zugleich 27 verschiedenen vertikalen Dreiermengen suchte, jedoch mit meinen Mitteln keine fand, fragte ich A.Schönhage, ob er mir helfen könne. Er antwortete mir mit einem Skript „Dreiermengen-Frequenz-Kombinationen“ und das veranlasste mich, mein Skript „Sudoku-Ornamente“ mit einem Abschnitt „Extreme Muster“ zu ergänzen.

Titelbild und Grafiken von Hendrik und Gerrit Herrmann.

Das Titelbild zeigt das Muster zum Sudoku  $G_1$  mit 27 verschiedenen Dreiermengen, die sowohl horizontal als auch vertikal vorkommen.

## Gliederung

Definition und Arten extremer Sudokus

Beispiele und Anzahlen

Sonderfall E27-Sudokus

Block-Sequenzen der E27-Sudokus

Darstellung der Sudokus von  $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Richtungen der E27- Sudokus und deren Verteilung in  $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Verteilung der Richtungen in der Menge aller E27-Sudokus

Mögliche Gestaltung einer Liste  $L_{48}^{\text{dbn},E27}$

Darstellung und Richtungen der Sudokus in den Bezirken des Zählalgorithmus

Blockstreifen-Struktur eines E27 -Sudokus

Verschobene und affine Muster

Die Sudokus der Grundmenge  $\Gamma_{\text{dbn},E27}^+$

Grafiken extremer Muster

## ANHANG

Zur Nomenklatur der Sudokus in  $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Zur Verteilung der Richtungen in  $\Omega_{\text{dbn},E27}$

hvn-Format für Sudokus (alias Winkelblocknormierung wbn-Format)

## Definition und Arten extremer Sudokus

Das einem Sudokumuster zugrunde liegende normierte Sudoku – also ein Sudoku mit dem Normblock  $e$  oben links – hat mindestens 3 und höchstens 27 verschiedene horizontale Dreiermengen und analog mindestens 3 und höchstens 27 verschiedene vertikale Dreiermengen. Für das normierte Sudoku, das der gezeigten Grafik „Chaos“ im Skript „Sudoku-Ornamente“ zugrunde liegt, gilt  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 22 \setminus 22$ . Generell meinen wir mit dem Wort Chaos, dass das zugrunde liegende Sudoku sowohl horizontal als auch vertikal mehr als 18 verschiedene Dreiermengen hat.

Ein Sudoku-Muster nennen wir extrem, wenn für das zugrunde liegende normierte Sudoku entweder  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 3 \setminus 3$  oder  $3 \setminus 27$  oder  $27 \setminus 3$  oder  $27 \setminus 27$  ist, im letztgenannten Fall also ein extremes Chaos-Muster ist. Sudokus dieser Art nennt A. Schönhage Spreiz-Sudokus. Er zeigte in Beispielen, dass sich mit Spreiz-Sudokus extrem schwere Sudoku-Rätsel entwickeln lassen.

Die Kardinalzahl der Vereinigung der Menge der horizontalen Dreiermenge mit der Menge der vertikalen Dreiermengen eines Sudokus schreiben wir  $d_{h \oplus v}$ , sie ist im allgemeinen nicht gleich der Summe der Kardinalzahlen  $d_{\text{hor}}$  und  $d_{\text{ver}}$ . Im Beispiel „Chaos“ ist  $d_{h \oplus v} = 43$ . Im Fall  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 27 \setminus 27$  nennen wir das Muster besonders extrem, wenn  $d_{h \oplus v} = 27 + 27 = 54$  ist, wenn also alle horizontalen Dreiermengen verschieden von allen 27 vertikalen Dreiermengen sind und sie damit in der Menge der 84 möglichen Dreiermengen der Ziffern  $1, 2, 3, \dots, 9$  eine Teilmenge von 54 Dreiermengen bilden.

## Beispiele und Anzahlen

### Extrem $3 \setminus 3$

Im Fall  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 3 \setminus 3$  sind notwendig alle Blöcke des normierten Sudokus  $A$  lokale Transformationen des Normblocks  $e$ . Im Abschnitt Scheinornamente des Skripts „Sudoku-Ornamente“ ist gezeigt: es gibt 64 bireduzierte normierte Sudokus, 4 davon sind die Superfixe  $U_i^{***}$   $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , 12 sind normale Fixsudokus vom R-Typ, 12 vom S-Typ und 36 sind normale Sudokus. Insgesamt ergeben sich  $36 \cdot 36 \cdot 64$  normierte Sudokus  $A$ .

Im Fall  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 3 \setminus 27$  fand A. Schönhage ein Sudoku  $A$  mit folgenden Blöcken

1 2 3	7 8 9	5 6 4
4 5 6	1 2 3	7 8 9
7 8 9	6 4 5	1 2 3
3 1 2	8 9 7	4 5 6
6 4 5	3 1 2	8 9 7
8 9 7	5 6 4	3 1 2
2 3 1	9 7 8	6 4 5
5 6 4	2 3 1	9 7 8
9 7 8	4 5 6	2 3 1

## Extrem 27\27

Im Fall  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 27 \setminus 27$  hat A. Schönhage die Anzahlen möglicher diagonalblock- normierter Sudokus A mit seinem homecomputer ( Pentium 4 ) gezählt und benutzte dazu eine Abwandlung seines Programms zur Zählung aller diagonalblock-normierter Sudokus – kurz dbn-Sudokus. Dies sind normierte Sudokus, in denen in den restliche zwei Blöcken der Hauptdiagonalen die Ziffern 1 oben links steht und zudem von den Ziffer der 4 Plätze jenseits der Plätze der obersten Blockzeile und der linken Blockspalte die kleinste Ziffer auf dem zentralen Platz des Blocks steht. Der Algorithmus aus dem Zählprogramm liegt dies dbn-Format zugrunde und die später angegebenen Sudokus  $G_i$ ,  $i \in \{1 \dots 8\}$ , sind derart dargestellt.

Es gibt 14151 483336 dbn-Sudokus mit  $d_{\text{hor}} \setminus d_{\text{ver}} = 27 \setminus 27$ . Es sind ca. 1 Promille aller dbn-Sudokus .

Die Zahl aller normierten Sudokus  $d_{\text{hor}} = d_{\text{ver}}$  ist das  $36 \cdot 36 = 1296$  fache der Zahl von dbn-Sudokus.

A. Schönhage gab folgendes Beispiel an

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 6 & 9 & 5 & 4 \\
 4 & 5 & 6 & 9 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \\
 7 & 8 & 9 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6
 \end{array} \\
 \\
 B = \begin{array}{ccccccc}
 8 & 7 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 & 9 & 3 \\
 6 & 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 8 & 2 \\
 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 8 & 5 & 7 & 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccccc}
 3 & 6 & 8 & 4 & 7 & 9 & 1 & 2 & 5 \\
 9 & 1 & 7 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 8 \\
 5 & 4 & 2 & 8 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9
 \end{array}
 \end{array}$$

Die Anzahl der Dreiermengen aus Spalten , die auch in Zeilen vorkommen, entnehmen wir folgender Tabelle

$v \setminus h$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$
$b_{11}$	-	-	-	-	0	1	-	0	0
$b_{12}$	-	-	-	0	-	0	0	-	0
$b_{13}$	-	-	-	0	0	-	0	0	-
$b_{21}$	-	0	0	-	-	-	-	0	0
$b_{22}$	0	-	0	-	-	-	0	-	0
$b_{23}$	3	0	-	-	-	-	0	0	-
$b_{31}$	-	0	0	-	0	0	-	-	-
$b_{32}$	0	-	0	0	-	1	-	-	-
$b_{33}$	0	0	-	0	0	-	-	-	-

Es gibt 5 Überschneidungen. Die Anzahl der verschiedenen Dreier ist  $d_{h \oplus v} = 27 + 27 - 5 = 49$ . Die Blockpaare an den Orten der Überschneidungen  $(b_{32}, b_{23})$ ,  $(b_{23}, b_{11})$ ,  $(b_{11}, b_{23})$  verketteten sich zur blockverbundenen ( $v \setminus h$ )-Sequenz  $(b_{32}, b_{23}, b_{11}, b_{23})$  mit dem Zweierzyklus  $(b_{23}, b_{11})$  am Ende. Diese Sequenz ist anfangs und am Ende einfach, mittig 3-fach durch Dreier verbunden.

Die Striche in der Tabelle markieren Blockpaare für die es keine Übereinstimmung geben kann. Dies gründet sich auf folgendem Sachverhalt: die Menge vertikaler Dreier eines Blocks ist disjunkt zur Menge der horizontalen Dreier seiner Blockzeile als auch seiner Blockspalte. Zur Begründung wähle man beispielsweise o.B.d.A. eine normierte Blockzeile  $(e, b, c)$  und aus

dem Normblock etwa den vertikalen Dreier  $\{1,4,7\}$ . Dieser Dreier kann weder in Block e noch in b, c eine Zeile bilden ohne die Sudoku-Bedingungen zu verletzen. Auch kann er keine Zeile in den Blöcken seiner Blockspalte bilden.

Für den **Sonderfall**  $d_h \oplus v = 27+27 = 54$  verschiedene Dreiermengen im Sudoku zählte er 5151600 dbn-Sudokus. Das sind 0,364 Promille aller extremen dbn-Sudokus mit  $d_{hor} \setminus d_{ver} = 27 \setminus 27$ . Damit gibt es  $1296 \cdot 5151600$  extreme normierte Sudokus mit  $d_h \oplus v = 54$ .

Als Beispiel gab A. Schönhage ein Sudoku D mit folgenden Blöcken an:

$$D = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 6 & 9 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 7 & 2 & 8 & 1 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 5 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ \\ 6 & 9 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 9 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 9 & 8 & 2 & 7 & 1 \\ \\ 3 & 6 & 8 & 7 & 4 & 9 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 8 & 6 & 1 & 3 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 \end{array}$$

### Sonderfall E27-Sudokus

Für den bemerkenswerten bislang nicht betrachteten **Sonderfall**  $d_h \oplus v = 27$  bei extremen Sudokus mit  $d_{hor} \setminus d_{ver} = 27 \setminus 27$  zählte er 48 dbn-Sudokus. Das sind weniger als es dbn-Sudokus Extrem  $3 \setminus 3$  gibt. Es sind ca.  $3,4 \cdot 10^{-9}$  aller extremen dbn-Sudokus mit  $d_{hor} \setminus d_{ver} = 27 \setminus 27$  und damit ca.  $3,4 \cdot 10^{-12}$  aller dbn-Sudokus. Insgesamt gibt es damit  $1296 \cdot 48 = 62208$  extreme normierte Sudokus mit  $d_{hor} = d_{ver} = d_h \oplus v = 27$ , kurz normierte **E27-Sudokus** genannt. Sie liegen in den  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen der betrachteten 48 dbn-Sudokus, erzeugt von den jeweils 6 lokalen Spaltenpermutationen der mittleren und hinteren Blockspalte sowie den jeweils 6 Zeilenpermutationen der mittleren und unteren Blockzeile der dbn-Sudokus.

A. Schönhage gab 8 Beispiele an.  $G_1$  und  $G_2$  sind Fortsetzungen des gleichen dbn-Tripels, die restlichen 6 sind Fortsetzungen eines anderen dbn-Tripels. In seinem Zählalgorithmus repräsentieren die Beispiele  $G_1, G_2$  Bezirke von jeweils 12 dbn-Sudokus, die konjugiert zu ihrem Repräsentanten  $G_1$  bzw.  $G_2$  sind und analog repräsentieren die restlichen 6 Beispiele die Sudokus ihrer Bereiche.

Er weist auf folgende Besonderheit hin: in jedem Beispiel gibt es Blockpaare  $(b_h, b_v)$  derart, dass die drei horizontalen Dreiermengen von  $b_h$  übereinstimmen mit den drei vertikalen Dreiermengen von  $b_v$ . Die Vereinigung der Sudokus aller 8 Bezirke bildet die von ihm gezählte Menge aller dbn-Sudokus vom Typ E27, wir notieren sie  $\Omega_{dbn,E27}$ . Acht davon hat er explizit angegeben, es ist die Teilmenge  $\Gamma_{dbn,E27} = \{G_1, \dots, G_8\}$ . Die Restmenge von  $\Gamma_{dbn,E27}$  in  $\Omega_{dbn,E27}$  schreiben wir  $\Delta_{dbn,E27}$ . Es sind die 40 diagonalblock-normierten E27-Sudokus, die nicht in  $\Gamma_{dbn,E27}$  liegen.

## Block-Sequenzen der E27-Sudokus

Das Studium der Sudokus von  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  offenbart eine bemerkenswerte Blocksequenzen-Struktur. Wir zeigen sie am Beispiel  $G_1$ .

Die Beispiele zeigen durchweg dreifach verbundene diagonalgerichtete Blocksequenzen.

Sie ergeben sich wie folgt:

Bildet man das kartesische Produkt  $B \times B$  der Menge  $B$  der 9 Blöcke  $b_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , des Sudokus  $G_1$ , so findet man eine Teilmenge  $\Delta_{h \setminus v}(G_1)$  unter den 81 geordneten Paaren  $(b_{i,j}, b_{k,l})$ ,  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ , genau 9 Paare  $(b_h, b_v)$  derart, dass die 3 horizontalen Dreier vom Block  $b_h$  zugleich die 3 vertikalen vom Block  $b_v$  sind, als auch eine Teilmenge  $\Delta_{v \setminus h}(G_1)$  9 Paare derart, dass die 3 vertikalen Dreier vom Block  $b_v$  zugleich die 3 horizontalen vom Block  $b_h$  sind. Die Menge der Paare  $(b_h, b_v)$  liegt invers zur Menge der Paare  $(b_v, b_h)$ .

Wir betrachten im folgenden die Menge  $\Delta_{v \setminus h}(G_1)$  der 9  $(b_v, b_h)$  - Paare.

Es sind

$(b_{11}, b_{32}), (b_{32}, b_{23}), (b_{23}, b_{11}), (b_{21}, b_{12}), (b_{12}, b_{33}), (b_{33}, b_{21}), (b_{31}, b_{22}), (b_{22}, b_{13}), (b_{13}, b_{11})$ .

Diese Paare verketteten sich zu drei durchweg dreigliedrigen dreifach verbundenen zyklischen Block-Sequenzen, wir sagen zu **totalen  $(v \setminus h)$ -Sequenzen**. Es sind dies die Blocktripel:

$(b_{11}, b_{32}, b_{23}), (b_{21}, b_{12}, b_{33}), (b_{31}, b_{22}, b_{13})$ .

Sie sind – hier im Sudoku  $G_1$  – parallel zur Nebendiagonalen gerichtet und schreiten zyklisch fort von links unten nach rechts oben. Das Sudoku  $G_1$  nennen wir deshalb – bezogen auf die Himmelsrichtungen NO, SO, SW, NW – im Diagonalkreuz ein NO-Sudoku. Beim zyklischen Voranschreiten von Block zu Block stimmen die jeweils vorliegenden vertikalen Dreier überein mit den vorzufindenden horizontalen Dreieren.

Im Beispiel  $G_2$  erhält man folgende Blockdreier-Sequenzen  $(b_{11}, b_{23}, b_{32}), (b_{12}, b_{21}, b_{33}), (b_{13}, b_{22}, b_{31})$ . Sie sind – wie in  $G_1$  – parallel zur Nebendiagonalen gerichtet, schreiten jedoch voran von rechts oben nach links unten. Es ist ein SW-Sudoku.

Im Beispiel  $G_3$  erhält man folgende Block-Sequenzen  $(b_{11}, b_{22}, b_{33}), (b_{12}, b_{23}, b_{31}), (b_{13}, b_{21}, b_{32})$ . Sie sind parallel zur Hauptdiagonalen gerichtet und schreiten voran von links oben nach rechts unten. Es ist ein SO-Sudoku.

Entsprechende Block-Sequenzen findet man auch in den Beispielen  $G_4, \dots, G_8$  parallel zur Hauptdiagonalen. Es sind SO-Sudokus wie  $G_3$ .

Bei einer Transformation der Sudokus von  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  durch einen Operator aus der Sudokugruppe  $G_0$  wird die totale  $(v \setminus h)$ -Blocksequenzen-Struktur auf das Bild übertragen, ebenso bei einer Ziffernpermutation. Die Richtung der Struktur kann sich dabei ändern. Die dbn-Sudokus aus den Bezirken sind gemäß dem Zählalgorithmus konjugiert zu ihrem Leader aus  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$ .

Zusammengefasst hat man den

### Satz 1:

Jedes Sudoku hat totale  $(v \setminus h)$ -Blocksequenzen-Struktur.

### Folgerung:

Jedes Sudoku in den  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen von  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$ , d.h. jedes normierte Sudoku, hat totale

(\h)-Blocksequenzen-Struktur und nach Ziffernpermutation damit jedes E27-Sudoku.

### Darstellung der Sudokus von $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Konkrete Darstellungen haben wir bislang nur von den acht Sudokus der Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$ . Konkrete Darstellungen für 40 Sudokus aus einer vom Computer mitgezählten Menge  $\Delta_{\text{dbn},E27}$  kennen wir bislang nicht, wissen jedoch, dass – auf Grund der Zählmethode – jedes von ihnen konjugiert zu genau einem Sudoku von  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  ist. Zu jedem Element aus  $\Delta_{\text{dbn},E27}$  gibt es einen Operator aus der Sudoku-Gruppe – mitunter verbunden mit einer Ziffernpermutation – derart, dass das betrachtete Sudoku aus  $\Delta_{\text{dbn},E27}$  Bild eines der Sudokus aus  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  ist. Einfache Beispiele hierfür sind die acht Sudokus  $G_i^\circ = R_1 S_1 G_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 8\}$ . Weitere Beispiele – nicht mehr ganz so einfach – sind  $G_1' = w' R_1 G_1$  und  $G_1'' = w'' S_1 G_1$ , wobei  $w' = u' \cdot v'$  mit  $u' = 1 \cdot r_2 \cdot rr$  und mit  $v' = 1 \cdot s_3 \cdot s$  und  $w'' = u'' \cdot v''$  mit  $u'' = 1 \cdot rr \cdot r_2$  und mit  $v'' = 1 \cdot s \cdot s_3$  ist. Die lokalen Operatoren  $w'$ ,  $w''$  transformieren die Blöcke  $b_{32}$ ,  $b_{23}$ , von  $G_1$  bzw. von  $G_3$  ins dbn-Format.

Analog ergeben sich zu allen acht Sudokus aus  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  Transformationsbilder  $G_i', G_i''$   $i \in \{2, 4, \dots, 8\}$ , die in  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  liegen. Es überschneiden sich jedoch das Umfeld von  $G_1$  mit dem Umfeld von  $G_6$  sowie das Umfeld von  $G_2$  mit dem Umfeld von  $G_7$ , beispielsweise  $G_1 \sim R_1 G_6$  bzw.  $G_2 \sim S_1 G_7$ . Man hat kein Überschneiden, wenn man statt  $G_1$  das Sudoku  $G_1^+ = (1, 1, r_1)(1, 1, s_1) \pi_1^+ R S G_1$  und statt  $G_2$  das Sudoku  $G_2^+ = (1, r_1, 1)(1, 1, s_1) \pi_1^+ R S G_2$  mit  $\pi_1^+ = (37458)(69)$  nimmt, von denen man annehmen kann, dass sie zum Zählbereich von  $G_1$  bzw.  $G_2$  gehören.

Die Sudokus  $G_1^+$ ,  $G_2^+$ ,  $G_3, \dots, G_8$  zusammen mit ihren Umfeldern bilden eine Menge von 32 verschiedenen dbn-Sudokus. Um für die restlichen 16 Sudokus konkrete Darstellungen anhand der Sudokus aus  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  zu erhalten, werden die vier Sudokus  $G_1^{+S} = (1, r_3, r)(1, s_3, s_1) \pi_1^+ R S G_1$ ,  $G_1^{+SS} = (1, r_1, r_1)(1, s_3, s) \pi_1^+ R S G_1$   $i \in \{1, 2\}$  und deren Umfeldler gebildet.

Die als Produkt von Zyklen geschriebene Ziffernpermutation  $\pi_1^+ = (37458)(69)$  besorgt die Transformation in normierte Sudokus, danach besorgen die lokalen Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$  die Transformation ins dbn-Format.

Insgesamt hat man anhand der Sudokus von  $\Gamma_{\text{dbn},E27}$  42 neue Sudokus zu den Sudokus  $G_i$   $i \in \{3, \dots, 8\}$  gebildet. Man hat damit 48 verschiedene dbn-Sudokus.

Die durch Hinzunahme der Sudokus  $G_1^+$ ,  $G_1^{+S}$ ,  $G_1^{+SS}$ ,  $G_2^+$ ,  $G_2^{+S}$ ,  $G_2^{+SS}$  zu den Sudokus  $G_i$ ,  $i \in \{3, \dots, 8\}$ , erweiterte Grundmenge notieren wir  $\Gamma_{\text{dbn},E27}^+$ .

### Richtungen der E27-Sudokus und deren Verteilung in $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Allgemein teilen wir die Menge der Sudokus in zwei Klassen abhängig von der Richtung ihrer \h-Blocksequenzen in hauptdiagonalgerichtete HD und antidiagonalgerichtete AD. Jede Klasse teilen wir in die zwei Sorten N und S: nach Norden gerichtete und nach Süden gerichtete. Der Möglichkeit nach gibt es damit die vier Arten: SO-, NW-Sudoku in der Klasse HD sowie NO-, SW-Sudoku in der Klasse AD.

Die Orientierung eines vorgelegten normierten E27- Sudokus B ist ausgehend vom Normblock stets am Ort des Partners  $b_h$  des Normblocks  $b_v$  zu erkennen. Notwendig ist  $b_h$  einer der Blöcke  $(b_{22}, b_{23}, b_{32}, b_{33})$ .

Oder man schaut auf jenen der Blöcke  $(b_{22}, b_{23}, b_{32}, b_{33})$ , der den e-Block als Partner hat, d.h. dessen Spaltendreier die Zeilendreier des e-Block sind.

Ziffernpermutationen als auch lokale Transformationen ändern die Richtung der  $(v \setminus h)$ -Blocksequenzen eines E27-Sudokus nicht. Es bleibt die Frage, wie viele dbn-Sudokus einer Richtung es in der Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  gibt. Wir fragen, ob es in der Menge der 48 dbn-Sudokus von jeder Art gleich viele gibt, also jeweils 12. Bei Transformation normierter Sudokus anhand des globalen Operators  $R_1S_1$  aus  $G_0$  bleibt die Klasse erhalten und die Sorte wechselt. Bei Transformation normierter Sudokus durch  $R_1$  wechselt die Klasse als auch die Sorte, bei Transformation durch  $S_1$  wechselt nur die Klasse, und wie gesagt, der Operator  $R_1S_1$  bewahrt die Klasse und ändert die Sorte. Lokale Operatoren haben auf die Richtung keinen Einfluss, sind sie aus  $T_{2 \times 3}$ , bewahren sie zudem den Normblock e.

Zu den Richtungen der Sudokus der erweiterten Grundmenge  $\Gamma^+_{\text{dbn},E27}$  läßt sich folgendes sagen:

Die  $(v \setminus h)$ -Blocksequenzen von  $G_1, G_1^+$  sind antidiagonal von links unten nach rechts oben gerichtet, ebenso die von  $G_1^{+S}, G_1^{+SS}$ . Die Sequenzen von  $G_2, G_2^+$  sind antidiagonal nach unten gerichtet, ebenso die von  $G_2^{+S}, G_2^{+SS}$ .

Die  $(v \setminus h)$ -Blocksequenzen der übrigen 6 Sudokus  $G_i, i \in \{3, \dots, 8\}$  der erweiterten Grundmenge  $\Gamma^+_{\text{dbn},E27} = \{G_1^+, G_1^{+S}, G_1^{+SS}, G_2^+, G_2^{+S}, G_2^{+SS}, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8\}$  sind hauptdiagonal von links oben nach rechts unten gerichtet. Zu jedem Sudoku aus der Menge  $\Gamma^+_{\text{dbn},E27}$  gibt es in der Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  ein Umfeld von 3 Sudokus, erzeugt durch den Operator  $R_1S_1$  und den Operatoren  $R_1, S_1$  verbunden mit lokalen Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$  zur Sicherung des dbn-Formats. Es wird somit zu jedem Sudoku der Menge  $\Gamma^+_{\text{dbn},E27}$  anhand eines Operators aus der Gruppe  $V_4 = \{id, R_1, S_1, R_1S_1\}$  und gegebenenfalls eines passenden lokalen Operators  $w = u \cdot v \in T_{2 \times 3}$  eine Schar von dbn-Sudokus der vier Richtungen gebildet. Also sind die vier Richtungen in der vom Computer gezählten Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  gleichverteilt.

### **Verteilung der Richtungen in der Menge aller E27-Sudokus.**

Die Gleichverteilung der Richtungen in  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  korrespondiert anhand von Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$  und Zifferpermutationen mit der Verteilung der Richtungen in der Menge  $X_{E27}$  aller E27-Sudokus. Man hat den

#### **Verteilungssatz**

In der Menge  $X_{E27}$  sind die vier Richtungen gleichverteilt.

Für diesen Satz gibt es einen direkten Beweis:

Man bildet in  $X_{E27}$  zu den 4 möglichen Richtungen die Teilmengen

$X_{E27,SO}, X_{E27,NW}, X_{E27,SW}, X_{E27,NO}$ . Jedes E27-Sudoku hat genau eine Richtung. Die 4 Teilmengen bilden damit eine Zerlegung der Menge  $X_{E27}$ . Zudem zerlegen wir  $X_{E27}$  in Bahnen von  $V_4$ . In jeder Bahn liegt auf Grund der richtungsändernden Eigenschaften der Operatoren ungleich  $id$  von  $V_4$  zu jeder Richtung genau ein Sudoku. Jede der Mengen  $X_{E27,SO}, X_{E27,NW}, X_{E27,SW}, X_{E27,NO}$  hat mit jeder der Bahnen genau ein Element gemeinsam. Damit sind die 4 Mengen gleichmächtig. Es ist

$$\#X_{E27,SO} = \#X_{E27,NW} = \#X_{E27,SW} = \#X_{E27,NO} = 9! \cdot 1296 \cdot 12.$$

Jedes E27-Sudoku korrespondiert mit genau einem Sudoku im dbn-Format gleicher Richtung. Dem entspricht – nun auf umgekehrten Weg – eine Korrespondenz der Mengen  $X_{E27,SO}, X_{E27,NW}, X_{E27,SW}, X_{E27,NO}$  mit einer Zerlegung der Menge aller E27- Sudokus mit



dbn-Format. Gemäß der Computerzählung handelt es sich um eine Zerlegung der Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  in jeweils 12 Sudokus gleicher Richtung.

Die Zerlegung  $X_{E27} = X_{E27,SO} \cup X_{E27,NW} \cup X_{E27,SW} \cup X_{E27,NO}$  korrespondiert mit der Zerlegung  $\Omega_{\text{dbn},E27} = X_{\text{dbn},E27,SO} \cup X_{\text{dbn},E27,NW} \cup X_{\text{dbn},E27,SW} \cup X_{\text{dbn},E27,NO}$ .

### Mögliche Gestaltung einer Liste $L48_{\text{dbn},E27}$

Bei einer Aufzählung der 48 Sudokus von  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  für eine Liste  $L48_{\text{dbn},E27}$  macht es Sinn die Sudokus gemäß der Zerlegung  $\Omega_{\text{dbn},E27} = X_{\text{dbn},E27,SO} \cup X_{\text{dbn},E27,NW} \cup X_{\text{dbn},E27,SW} \cup X_{\text{dbn},E27,NO}$  anzuordnen, also die Sudokus zweidimensional durch  $G_{i,j}$ ,  $i \in \{1,2,3,4\}$ ,  $j \in \{1, \dots, 12\}$  zu notieren. Dabei steht der Zeilenindex für die Richtungen SO, NW, SW, NO und der Spaltenindex zählt die 12 Sudokus der durch den Zeilenindex gekennzeichneten Teilmenge auf. Man setzt dazu

$$G_{1,1} = G_1^{+}, G_{1,2} = G_2^{++}, G_{1,i}, i \in \{3, \dots, 8\}.$$

$$G_{1,9} = G_1^{+S}, G_{1,10} = G_1^{+SS}, G_{1,11} = G_2^{+S}, G_{1,12} = G_2^{+SS}$$

Damit erhält man die erweiterte Basismenge

$\Gamma_{\text{dbn},E27,SO}^+ = \{G_{1,1}^+, G_{1,2}^{++}, G_{1,j}, j=3, \dots, 12\}$ . Es ist die Teilmenge der SO-Sudokus in  $\Omega_{\text{dbn},E27}$ . Anhand der Operatoren von  $V_4$  und lokalen Operatoren  $w \in T_{2 \times 3}$  ergeben sich die Teilmengen von  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  zu den Richtungen NW, NO, SW.

### Darstellung und Richtungen der Sudokus in den Bezirken des Zählalgorithmus

Die mit den Operatoren aus  $V_4 = \{\text{id}, R_1, S_1, R_1 S_1\}$  anhand der Sudokus aus der Basismenge  $\Gamma_{\text{dbn},E27}^+$  erzeugten zwölf Bahnen schreiben wir  $V_4 G_i^+$ ,  $V_4 G_i^{+S}$ ,  $V_4 G_i^{+SS}$  für  $i \in \{1,2\}$  und  $V_4 G_i$ ,  $i \in \{3, \dots, 8\}$ .

Man kann annehmen: die Sudokus von  $[V_4 G_i]_{\text{dbn}}$ ,  $i = \{3, \dots, 8\}$  sind die Sudokus der von den  $G_i$  repräsentierten Bezirke und die Sudokus von  $V_4 G_i^+$ ,  $V_4 G_i^{+S}$ ,  $V_4 G_i^{+SS}$ ,  $i \in \{1,2\}$ , sind Teilmengen der Bezirke von  $G_1$  bzw. von  $G_2$ . Damit kennt man Darstellungen für 48 der vom Computer gezählten dbn-Sudokus.

Auf Grund der richtungsändernden Wirkung der Operatoren  $R_1, S_1, R_1 S_1$  bei Transformation eines o.B.d.A. normierten Sudokus kann man die Verteilung der Richtungen in den Bezirken angeben. Wir stützen uns dabei auf die Richtungsinvarianz gegenüber lokalen Transformationen sowie auf die der globalen Operatoren RS, RRSS als auch auf die Richtungsinvarianz bei Ziffernpermutationen.

$G_1^+, G_1^{+S}, G_1^{+SS}$  sind NO-Sudokus,  $G_2^+, G_2^{+S}, G_2^{+SS}$  sind SW-Sudokus. Es sind in jeder Bahn alle 4 Richtungen vertreten.

In jedem Bezirk sind die Richtungen gleichverteilt. In den Bezirken von  $G_1$  und  $G_2$  gibt es von jeder Art drei. In  $G_i$ ,  $i \in \{3, \dots, 8\}$  von jeder Art eins.

### Blockstreifen-Struktur eines E27-Sudokus

Vermischt mit der diagonal gerichteten totalen ( $\vee$ h)-Blocksequenzen-Struktur hat ein E27-Sudoku  $B = (b_{i,j})$ ,  $i, j \in \{1,2,3\}$ , Anzahlforderungen neben den Sudoku-Bedingungen zu erfüllen.

Man beginnt mit der ersten Blockzeile  $(b_{11}, b_{12}, b_{13})$  eines Sudokus, o.B.d.A. sei  $b_{11} = e$  und wir nehmen an,  $B$  sei ein SO-Sudoku, wie etwa die Beispiele  $G_3, G_4, \dots, G_8$ . In dieser

Blockzeile sind – wie in jeder Blockzeile eines Spreizsudokus – notwendig 9 verschiedene horizontale und davon verschiedene 9 vertikale Dreiermengen, insgesamt also 18 verschiedene Dreiermengen. Auf Grund der totalen (v\h)-Blocksequenzen-Struktur sind die horizontalen Dreier in den Blöcken  $(e, b_{12}, b_{13})$  identisch mit den vertikalen Dreier in den Blöcken  $(b_{33}, b_{31}, b_{32})$ .

Die vertikalen Dreier der ersten Zeile findet man als horizontale Dreier in den Blöcken  $(b_{22}, b_{23}, b_{21})$  derart eingetragen, dass 9 neue vertikale Dreier sich bilden und Sudoku-Bedingungen nicht verletzt sind.

Insgesamt liegen in den beiden Blockzeilen 27 verschiedene Dreier.

Die vertikalen Dreier der zweiten Zeile findet man als horizontale Dreier in den Blöcken  $(b_{32}, b_{33}, b_{31})$  derart eingetragen, dass vertikal sich jene Dreier bilden, die gleich den horizontalen Dreier der Blöcke  $(b_{13}, e, b_{12})$  sind.

Analog kann man den Aufbau eines normierten NO-Sudokus oder etwa SW-Sudokus darstellen und es zugleich am Bau der Beispiele  $G_1, G_2$  betrachten.

In bezug auf die Anzahlen verschiedener horizontaler und vertikaler Dreiermengen eines Spreizsudokus mit totaler (v\h)-Blocksequenzen-Struktur stellt man folgendes fest:

- a) In jeder Blockzeile liegen 9 verschiedene horizontale Dreier und verschieden von all diesen 9 verschiedene vertikale Dreier, insgesamt also 18 verschiedene Dreier.
- b) In je 2 Blockzeilen liegen insgesamt 18 verschiedene horizontale Dreier sowie 18 verschiedene vertikale Dreier. Dabei sind alle 9 vertikalen Dreier genau einer Blockzeile gleich den horizontalen Dreier der anderen Blockzeile.

Die Aussage (a) gilt notwendig für jedes Spreizsudoku, denn in einem solchen Sudoku sind die horizontalen Dreier alle verschieden, ebenso die vertikalen. Zudem kann – wegen der Sudoku-Bedingungen – ein vertikaler Dreier nicht zugleich als horizontaler auftreten.

Die Aussage (b) ergibt sich aus der totalen (v\h)-Blocksequenzen-Struktur.

Es ergibt sich

## **Satz 2**

Jedes Spreizsudoku mit einer totalen Blocksequenzen-Struktur ist ein E27- Sudoku.

### **Beweis**

Beim Voranschreiten von einem Blockzeilenpaar zur nächsten Blockzeile, beispielsweise beim SO-Sudoku vom Paar der 1. und 2. Blockzeile zur 3. Blockzeile, erhöhen sich notwendig die Anzahlen der verschiedenen horizontalen Dreier als auch der vertikalen Dreier um jeweils 9 von 18 auf 27 (Spreizsudoku-Eigenschaft).

Zugleich erhöht sich wegen der Kontakte der 3. Blockzeile mit den Blockzeilen des Blockzeilenpaares die Anzahl der gemeinsamen horizontalen und vertikalen Dreier von 9 um  $9+9=18$  auf 27 (totale Blocksequenzen-Struktur).

## **Verschobene und affine Muster**

Die Struktur eines E27-Sudokus regt dazu an, die Grafik so zu gestalten, dass der Symbolblock in der mittleren Blockspalte liegt. Es gibt 2 Möglichkeiten:

1. Man transformiert das zugrunde liegende Sudoku zusammen mit dem darauf gesetzten Muster mit einem der Operatoren  $S, RS, RRS$ . Man erhält ein zum ursprünglichen Muster verschobenes Muster.
2. Statt auf die Zeilen und Spalten des Normblocks  $e$ , fixiert man die zwei Merkmale mit ihren Ausprägungen auf den zentralen Block (oder darüber\darunter) des Sudokus. Dem

korrespondiert die Ziffernpermutation, die den Zentralblock (bzw. darüber\darunter) in den Normblock e überführt. In bezug auf das Muster mit dem Normblock oben links erhält man ein affines Muster des Sudokus.

### Die Sudokus der Grundmenge $\Gamma_{\text{dbn}, E_{27}}^+$

Gemäß dem Zählalgorithmus sind die Sudokus  $G_i \ i \in \{1, 2, \dots, 8\}$  Quellen der nötigen 48 dbn-Sudokus zur Erzeugung aller  $E_{27}$ -Sudokus.

In der Liste der Beispiele hat A. Schönhage für ein ausgewähltes Paar  $(b_v, b_h)$  den Block  $b_v$  durch ein Dach und den Block  $b_h$  durch einen „Doppelpunkt“ markiert. Zum Beispiel sind in  $G_i$  die Zeilen von  $b_h$  sowie Spalten von  $b_v$  des besonderen Blockpaares  $\{4, 6, 9\}$ ,  $\{1, 7, 8\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$

1	1 2 3 5 7 8 9:6:4 4 5 6 3 9 2 8:1:7 7 8 9 6 4 1 2:3:5	1 2 3 9 6 8 5 7 4 4 5 6 3 1 7 8 9 2 7 8 9 2 4 5 6 3 1	
$G_1 =$	9 6 8 1^2^4 5 7 3 2 4 5 7^3^9 6 8 1 3 1 7 8^5^6 4 9 2	$G_2 =$	5 7 8 1^2^4 9 6 3 6 4 1 7^3^9 2 8 5 3 9 2 8^5^6 4 1 7
	5 7 4 9 6 3 1 2 8 6 3 1 2 8 5 7 4 9 8 9 2 4 1 7 3 5 6	9:6:4 5 7 3 1 2 8 2:3:5 6 8 1 7 4 9 8:1:7 4 9 2 3 5	
	1 2 3 5^8^6 9 7 4 4 5 6 3^7^9 8 1 2 7 8 9 2^1^4 6 3 5	1 2 3 4 7 9 6^8^5 4 5 6 2 1 8 9^7^3 7 8 9 5 3 6 4^1^2	
$G_3 =$	9 6 8 1 4 7 5:2:3 3 1 7 8 2 5 4:9:6 2 4 5 6 9 3 7:8:1	$G_4 =$	2:3:5 1 4 7 8 9 6 9:6:4 8 2 5 7 3 1 8:1:7 6 9 3 5 2 4
	5 7 4 9 3 2 1 6 8 6 3 1 7 5 8 2 4 9 8 9 2 4 6 1 3 5 7	3 9 2 7 5 4 1 6 8 5 7 8 3 6 1 2 4 9 6 4 1 9 8 2 3 5 7	
	1 2 3 4:6:9 7 8 5 4 5 6 7:1:8 9 2 3 7 8 9 5:3:2 4 1 6	1 2 3 7 5 8 4:9:6 4 5 6 9 3 2 7:8:1 7 8 9 4 6 1 5:2:3	
$G_5 =$	6 3 5 1 4 7 8 9 2 9 7 4 8 2 5 6 3 1 8 1 2 6 9 3 5 7 4	$G_6 =$	8 9 2 1 4 7 6 3 5 6 3 1 8 2 5 9 7 4 5 7 4 6 9 3 8 1 2
	3^9^7 2 5 4 1 6 8 5^6^8 3 7 1 2 4 9 2^4^1 9 8 6 3 5 7	2 4 5 3^7^9 1 6 8 3 1 7 5^8^6 2 4 9 9 6 8 2^1^4 3 5 7	

$\begin{array}{ccc} 123 & 754 & 896 \\ 456 & 982 & 731 \\ 789 & 361 & 524 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 123 & 986 & 574 \\ 456 & 371 & 892 \\ 789 & 254 & 631 \end{array}$
$G_7 = \begin{array}{ccc} 392 & 147 & 6^8^5 \\ 641 & 825 & 9^7^3 \\ 578 & 693 & 4^1^2 \end{array}$	$G_8 = \begin{array}{ccc} 5^6^8 & 147 & 923 \\ 3^9^7 & 825 & 416 \\ 2^4^1 & 693 & 785 \end{array}$
$\begin{array}{ccc} 2:3:5 & 479 & 168 \\ 8:1:7 & 536 & 249 \\ 9:6:4 & 218 & 357 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 974 & 5:3:2 & 168 \\ 635 & 7:1:8 & 249 \\ 812 & 4:6:9 & 357 \end{array}$

### Hilfsleader für den Zählbezirk von $G_1$

Für das Sudoku  $G_1^+$  aus der erweiterten Grundmenge  $\Gamma_{\text{dbn}, E27}^+$  ergibt sich folgende Darstellung  $G_1^+ = (1,1,r_1)(1,1,s_1)\pi_1^+ \text{RS } G_1$ ,  $\pi_1^+ = (37458)(69)$ ,

$$G_1^+ = \begin{array}{ccc} 123 & 845 & 679 \\ 456 & 971 & 283 \\ 789 & 362 & 541 \\ \\ 695 & 127 & 384 \\ 278 & 436 & 915 \\ 314 & 589 & 726 \\ \\ 847 & 693 & 152 \\ 931 & 258 & 467 \\ 562 & 714 & 398 \end{array}$$

Für die Sudokus  $G_1^{+S}$ ,  $G_1^{+SS}$  ergeben sich die Darstellungen

$G_1^{+S} = (1,r_3,r)(1,s_3,s_1)\pi_s(s,1,1)G_1^+$ ,  $\pi_s = (312)(645)(978)$ ,  $G_1^{+SS} = (1,r_1,r_1)(1,s_3,s)\pi_{ss}(ss,1,1)G_1^+$ ,  $\pi_{ss} = (213)(546)(879)$

$\begin{array}{ccc} 123 & 596 & 478 \\ 456 & 872 & 319 \\ 789 & 413 & 625 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 123 & 674 & 859 \\ 456 & 983 & 217 \\ 789 & 521 & 346 \end{array}$
$G_1^{+S} = \begin{array}{ccc} 938 & 154 & 762 \\ 647 & 328 & 951 \\ 518 & 967 & 843 \end{array}$	$G_1^{+SS} = \begin{array}{ccc} 845 & 139 & 672 \\ 362 & 748 & 591 \\ 971 & 265 & 483 \end{array}$
$\begin{array}{ccc} 364 & 285 & 197 \\ 895 & 741 & 236 \\ 271 & 639 & 584 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 697 & 852 & 134 \\ 514 & 396 & 728 \\ 238 & 417 & 965 \end{array}$

Für das Sudoku  $G_2^+$  aus der erweiterten Grundmenge  $\Gamma_{\text{dbn}, E27}^+$  ergibt sich folgende Darstellung  
 $G_2^+ = (1, r_1, 1)(1, 1, s_1) \pi_1^+ \text{RS } G_2, \pi_1^+ = (37458)(69)$ .

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & 6 & 9 & 5 & 8 & 7 & 4 \\
 & & & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 & 9 & 1 & 3 \\
 & & & 7 & 8 & 9 & 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \\
 \\
 G_2^+ = & & & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 9 \\
 & & & 9 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 5 \\
 & & & 3 & 6 & 2 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 1 \\
 \\
 & & & 6 & 9 & 7 & 8 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\
 & & & 2 & 3 & 8 & 9 & 5 & 1 & 4 & 6 & 7 \\
 & & & 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 & 9 & 8
 \end{array}$$

Für die Sudokus  $G_2^{+S}, G_2^{+SS}$  ergeben sich die Darstellungen  
 $G_2^{+S} = (1, r_3, r)(1, s_3, s_1) \pi_s(s, 1, 1) G_2^+, \pi_s = (312)(645)(978), G_2^{+SS} = (1, r_1, r_1)(1, s_3, s) \pi_{ss}(ss, 1, 1) G_2, \pi_{ss} = (213)(546)(879)$ .

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & 2 & 3 & 7 & 4 & 6 & 9 & 5 & 8 \\
 & & & 4 & 5 & 6 & 8 & 3 & 9 & 7 & 1 & 2 \\
 & & & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 & 3 \\
 \\
 G_2^{+S} = & & & 2 & 7 & 8 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 & 9 \\
 & & & 6 & 9 & 5 & 3 & 2 & 8 & 4 & 7 & 1 \\
 & & & 3 & 1 & 4 & 9 & 6 & 7 & 8 & 2 & 5 \\
 \\
 & & & 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 & 1 & 9 & 7 \\
 & & & 8 & 4 & 7 & 5 & 9 & 1 & 2 & 3 & 6 \\
 & & & 9 & 3 & 1 & 6 & 7 & 2 & 5 & 8 & 4 \\
 \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 & 9 \\
 & & & 4 & 5 & 6 & 9 & 1 & 7 & 2 & 8 & 3 \\
 & & & 7 & 8 & 9 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \\
 \\
 G_2^{+SS} = & & & 6 & 4 & 7 & 1 & 3 & 9 & 8 & 5 & 2 \\
 & & & 5 & 1 & 2 & 7 & 4 & 8 & 3 & 9 & 6 \\
 & & & 9 & 3 & 8 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 7 \\
 \\
 & & & 8 & 9 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\
 & & & 3 & 6 & 4 & 5 & 9 & 1 & 7 & 2 & 8 \\
 & & & 2 & 7 & 1 & 4 & 8 & 3 & 9 & 6 & 5
 \end{array}$$

## Grafiken extremer Muster

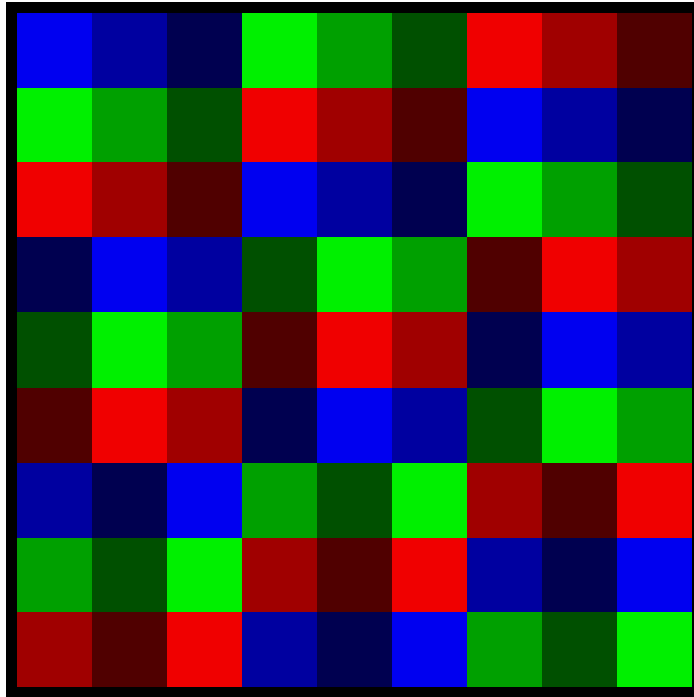


Abb.1  $U_1$  \*\*\* Extrem 3\3,  
Urmuster U eines Superfix von A. Schönhage

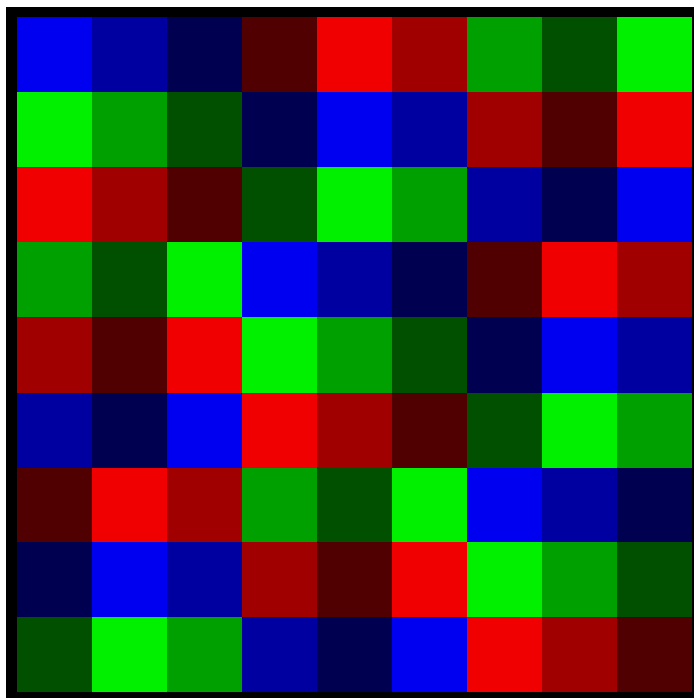


Abb. 2  $U_2$  Extrem 3\3

Grundmuster C eines Sudokus von W. Jehne

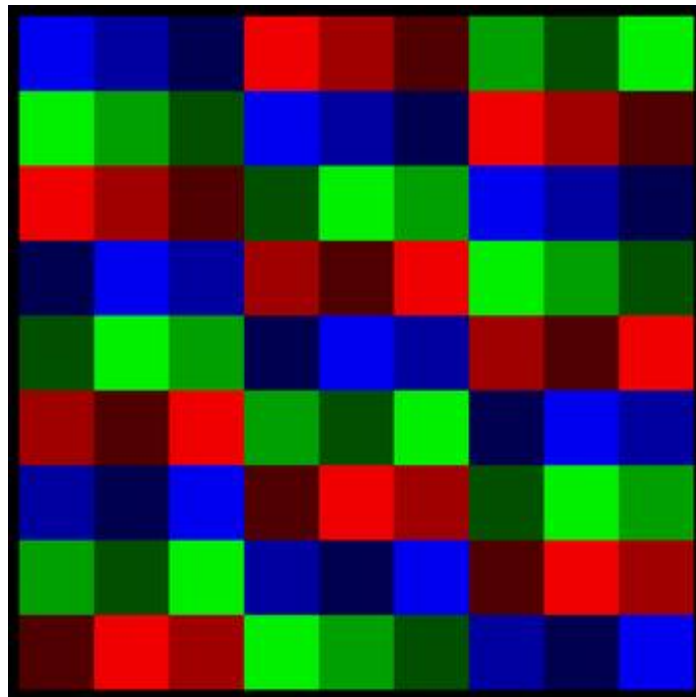


Abb. 3 A Extrem 3\27

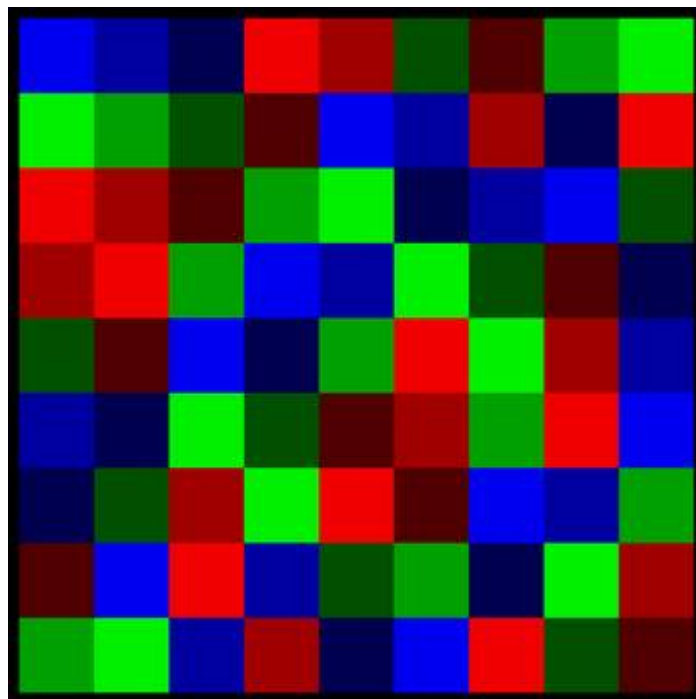


Abb.4 B Extremes Chaos mit  $d_{h \oplus v} = 49$

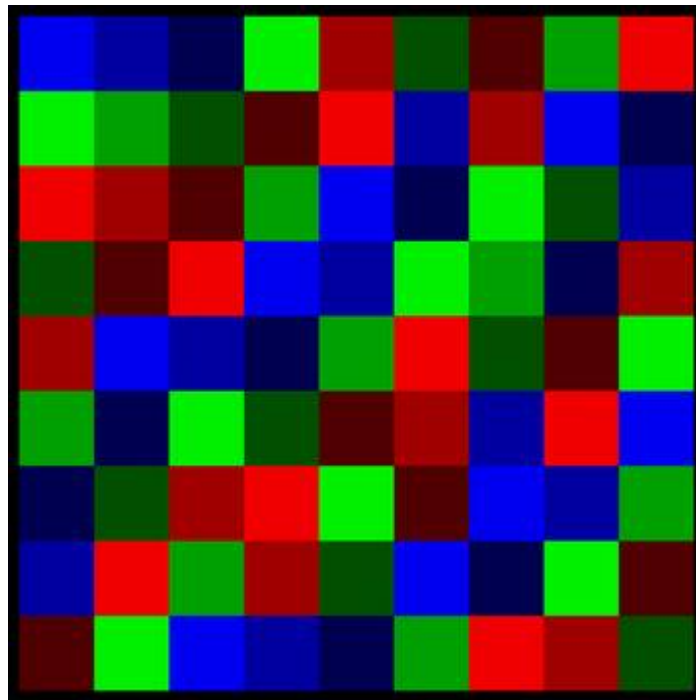


Abb.5 D Extrem 54

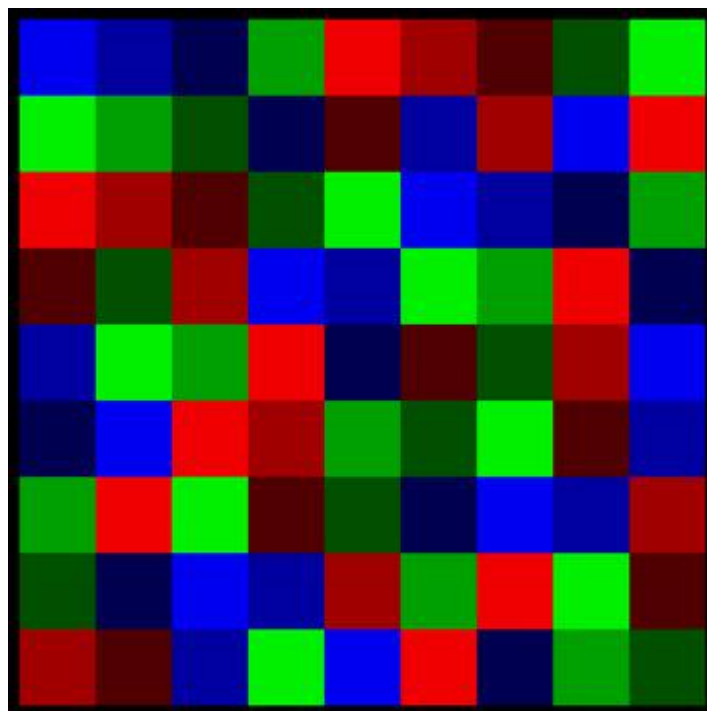


Abb.6  $G_1$  Extrem 27

In den Mustern der E27-Sudokus sind die vertikalen Dreier des Blocks, der den e-Block als Partner hat, gleich den horizontalen Dreiern des e-Blocks; für  $G_1$  ist es der Block Mitte rechts.



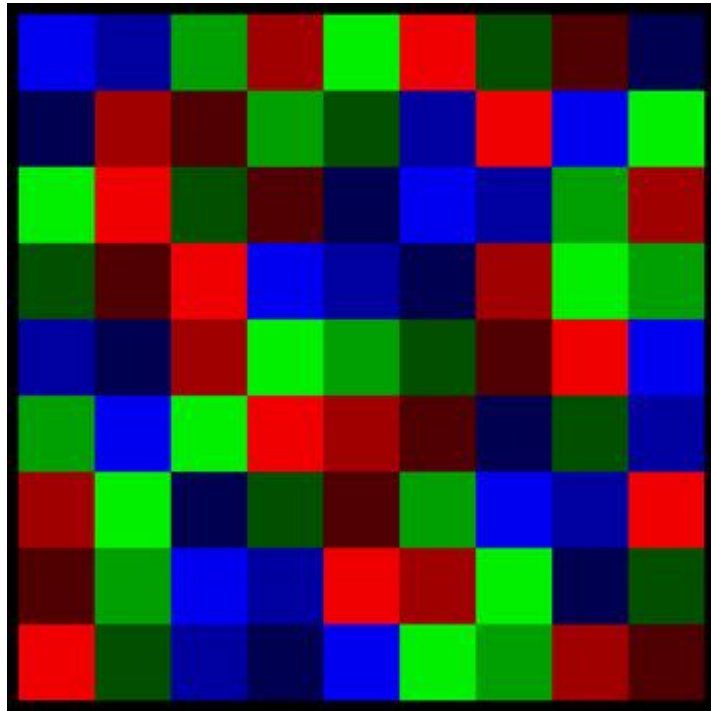


Abb.7  $G_1$  affines Muster  
 Symbolblock  $b_v$  zentral, Partner  $b_h$  oben rechts, der Block unten links führt zum Symbolblock.

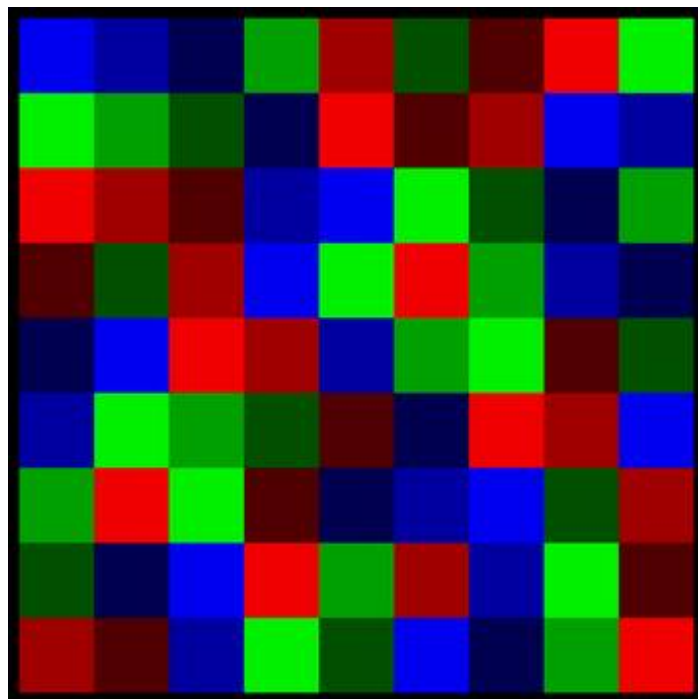


Abb.8  $G_3$  Extrem 27

Symbolblock  $b_v$  oben links , Partner zentral, der Block unten rechts führt zum Symbolblock.

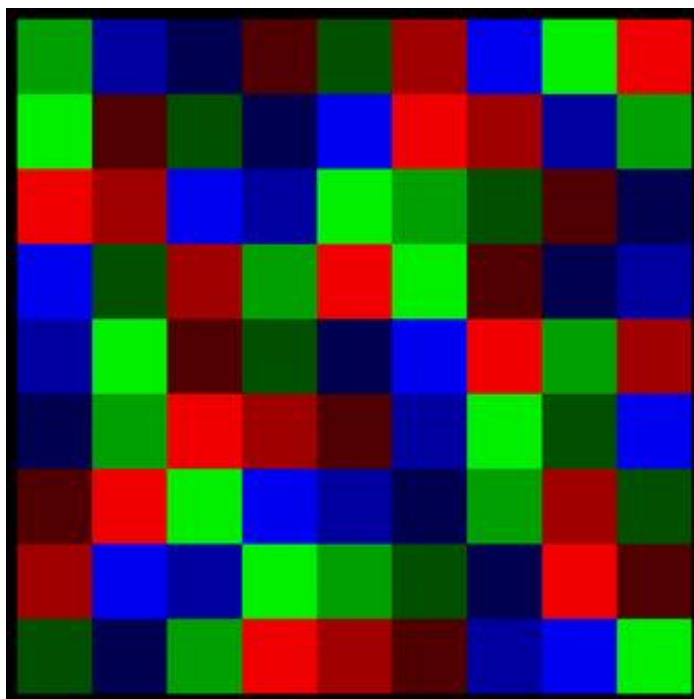


Abb.9  $G_3$  verschobenes Muster  
 Symbolblock  $b_v$  unten Mitte, Partner  $b_h$  oben rechts, der Block Mitte links führt zum  
 Symbolblock.

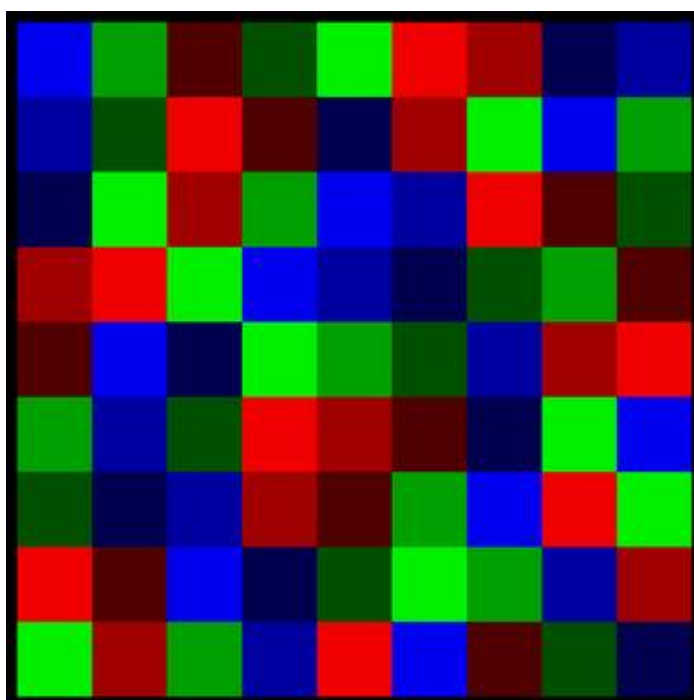


Abb.10  $G_3$  affines Muster  
 Symbolblock  $b_v$  zentral, Partner  $b_h$  unten rechts, der Block  
 oben links führt zum Symbolblock.

## ANHANG

### Vermerk zur Nomenklatur der Sudokus in $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Gemäß dem Zählalgorithmus zerfällt die Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  in zwei Großbezirke  $B_1, B_2$  mit je 12 dbn-Sudokus und in sechs Kleinbezirke  $B_i, i \in \{3, \dots, 8\}$  mit je 4 Sudokus. Die Großbezirke werden von den Sudokus  $G_1, G_2$  repräsentiert, die übrigen Bezirke von den Sudokus  $G_3, \dots, G_8$ .

Jeder der Großbezirke zerfällt in drei Kleinbezirke mit den Hilfsleadern  $G_i^+, G_i^{+S}, G_i^{+SS}, i \in \{1, 2\}$ . Zur Abkürzung im Text ist gesetzt  $G_9 = G_1^{+S}, G_{10} = G_1^{+SS}, G_{11} = G_2^{+S}, G_{12} = G_2^{+SS}$ . „Leader“ der Kleinbezirke  $B_i$  sind die Sudokus  $G_i, i \in \{3, \dots, 8\}$ . Jeder der damit erhaltenen 12 Bezirke umfasst 4 Sudokus.

Neben dem Leader gibt es einen  $R_1S_1$ -Adjutanten, notiert durch  $G_i^0$ .

Daneben gibt es in jedem Bezirk einen  $R_1$ -Sekundanten  $G_i^?$  und einen  $S_1$ -Sekundanten  $G_i^{??}, i \in \{1, \dots, 12\}$ .

### Vermerk zur Verteilung der Richtungen in $\Omega_{\text{dbn},E27}$

Jeder der Leader  $G_1^+, G_2^+, G_i, i \in \{3, \dots, 12\}$  im Kleinbezirk  $B_i$  hat einen durch den Operator  $R_1S_1$  bestimmten entgegengerichteten Adjutanten  $G_1^{+0}, G_2^{+0}, G_i^0 = R_1S_1G_i$ . Zudem hat jeder Leader  $G_1^+, G_2^+, G_i$  zwei einander entgegengerichtete Sekundanten quer zur Richtung ihres Leaders, einen ersten Sekundanten  $G_1^{+?} = w'R_1G_1^+, G_2^{+?} = w'R_1G_2^+, G_i^? = w'R_1G_i$  und einen zweiten Sekundanten  $G_1^{+??} = w''S_1G_1^+, G_2^{+??} = w''S_1G_2^+, G_i^{??} = w''S_1G_i$ , wobei die lokalen Operatoren  $w', w''$  richtungsinvariant die Transformation ins dbn-Format bewirken,

Auf diese Weise ergibt sich für jedem Leader der 12 Kleinbezirke eine Schar von stets 4 unterschiedlich gerichteten dbn-Sudokus.

Von jeder der 4 möglichen Richtungen gibt es demnach in der Menge  $\Omega_{\text{dbn},E27}$  zwölf Sudokus. Fasst man die Sudokus gleicher Richtung in Mengen  $X_{\text{dbn},E27,SO}, X_{\text{dbn},E27,NW}, X_{\text{dbn},E27,NO}, X_{\text{dbn},E27,SW}$  ergibt sich die Zerlegung

$$\Omega_{\text{dbn},E27} = X_{\text{dbn},E27,SO} \cup X_{\text{dbn},E27,NW} \cup X_{\text{dbn},E27,NO} \cup X_{\text{dbn},E27,SW}.$$

Man kann nun die Sudokus einer der Mengen, z.B. die Menge  $X_{\text{dbn},E27,SO}$ , als Leader deklarieren und um jeden Leader herum anhand der Operatoren aus  $V_4 = \{\text{id}, R_1, S_1, R_1S_1\}$  einen Adjutanten und zwei Sekundanten in Verbindung mit  $w \in T_{2 \times 3}$  scharen. Alle Adjutanten liegen dann in der Menge  $X_{\text{dbn},E27,NW}$ , alle  $R_1$ -Sekundanten in der Menge  $X_{\text{dbn},E27,NO}$ , alle  $S_1$ -Sekundanten in der Menge  $X_{\text{dbn},E27,SW}$ .

### hvn-Format für Sudokus (alias Winkelblocknormierung, wbn-Format)

Alternativ zum diagonal orientierten dbn-Format führen wir in die Theorie der Sudokus ein auf die oberste Blockzeile und erste Blockspalte bezogenes und damit horizontal sowie vertikal orientiertes Format ein. Wir nennen es hvn-Format.

#### Definition

Ein Sudoku  $B = (b_{i,j}), i, j \in \{1, 2, 3\}$ , ist ein hvn-Sudoku genau dann, wenn es normiert ist – also  $(b_{11})$  der Normblock  $e$  ist – und folgende Eigenschaften hat :

1. die Ziffern in den Zeilen der Blöcke  $(b_{12}), (b_{13})$ , in denen Ziffer 1 steht, sind von links nach rechts der Größe nach notiert.

2. die Ziffern in den Spalten der Blöcke  $(b_{21}), (b_{31})$ , in denen Ziffer 1 steht, sind von oben nach unten der Größe nach notiert.

Die Menge der hvn-Sudokus notieren wir  $X_{hvn}$ . Sie ist ein zur Menge  $X_{dbn}$  der dbn-Sudokus äquivalentes Repräsentantensystem für die  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen der Menge  $X_e$  aller normierten Sudokus.

Man hat den

### Transformationssatz

Zu jedem dbn-Sudoku  $B = (b_{i,j}), i,j \in \{1,2,3\}$ , gibt es stets genau einen Operator  $w = u \cdot v \in T_{2 \times 3}$  derart, dass das Sudoku  $B' = w \cdot B$  ein hvn-Sudoku ist.

Die Zuordnung  $B \rightarrow B'$  ist umkehrbar und surjektiv.

### Beweis

Zum gegebenen  $B$  wählt man den Operator  $w = u \cdot v$  derart, dass durch die lokalen Zeilenoperatoren in  $u = (1, u_2, u_3)$  und die lokalen Spaltenoperatoren in  $v = (1, v_1, v_2)$  folgendes geschieht:  $u_2$  bringt im Block  $(b_{21})$  die Ziffern in der Spalte mit der Ziffer 1 in die geforderte Reihenfolge. Ebenso  $u_3$  im Block  $(b_{31})$ .

$v_2$  bringt im Block  $(b_{12})$  die Ziffern in der Zeile mit der Ziffer 1 in die geforderte Reihenfolge. Ebenso  $v_3$  im Block  $(b_{13})$ .

Die Umkehrung erfolgt durch den inversen Operator.

Analog konstruiert man zu jedem hvn-Sudoku  $A$  einen Operator  $w'$  derart, dass  $w' \cdot A$  ein dbn-Sudoku ist. Dazu werden die Komponenten von  $w' = u' \cdot v'$  mit  $u' = (1, u_2', u_3')$  und  $v' = (1, v_2', v_3')$  derart gewählt, dass im Bild  $A'$  in den Diagonalblöcken  $(b_{22}), (b_{33})$  die Ziffernverteilung des dbn-Formats erreicht wird. Die Umkehrung von  $w'$  sichert die Surjektivität.

Der Transformationssatz sichert eine eindeutige Beziehung – vermittelt durch lokale Operatoren aus  $T_{2 \times 3}$  – zwischen der Menge  $\Omega_{dbn}$  aller dbn-Sudokus und der Menge  $\Omega_{hvn}$  aller hvn-Sudokus.

Insbesondere gibt es zu der von A. Schönhage gezählten Menge  $\Omega_{dbn,E27}$  eine Menge  $\Omega_{hvn,E27}$ . Die den 12 Sudokus  $G_1^+, G_2^+, G_i$  zugeordneten hvn-Sudokus notieren wir  $G_1^{+*}, G_2^{+*}, G_i^*$ ,  $i \in \{3, \dots, 12\}$ . Sie bilden die Menge  $\Gamma_{hvn,E27}^+$ . Die  $G_i^*$  sind orientiert wie die  $G_i$ . Jedes  $G_i^*$  befindet sich in einer Schar der 4 Richtungen, erzeugt von den Operatoren der Gruppe  $V_4 = \{id, R_1, S_1, R_1 S_1\}$ . Mit dem  $G_i^*$  sind bereits alle Sudokus der Bahnen  $V_4 G_i^*$  hvn-Sudokus. Eine Anpassung an die gewünschte Form durch lokale Operatoren ist hier für die Transformationsbilder  $R_1 G_i^*, S_1 G_i^*$  nicht erforderlich. Konkret hat man damit anhand der Menge der 12 hvn-Sudokus  $G_i^*$  nun die Menge  $\{G_i^*, R_1 G_i^*, S_1 G_i^*, R_1 S_1 G_i^*\}, i \in \{1, \dots, 12\}$ .

Die Vereinigung der  $V_4$ -Bahnen der erweiterten Basismenge ergibt die Menge aller 48 E27-Sudokus im hvn-Format, wir notieren sie  $\Omega_{hvn,E27}$ .

In Bezug auf eine Zerlegung  $\Omega_{hvn,E27} = X_{hvn,E27,SO} \cup X_{hvn,E27,NW} \cup X_{hvn,E27,SW} \cup X_{hvn,E27,NO}$  ergibt sich  $R_1 X_{hvn,E27,SO} = X_{hvn,E27,NO}$ ,

$$S_1 X_{hvn,E27,SO} = X_{hvn,E27,SW},$$

$$R_1 S_1 X_{hvn,E27,SO} = X_{hvn,E27,NW}$$

Anhand der Operatoren aus  $V_4$  und einer Liste  $L_{12,hvn,E27,SO}$  erhält man somit Darstellungen für alle 48 Sudokus von  $\Omega_{hvn,E27}$ , sortiert in die Mengen  $X_{hvn,E27,SO}, X_{hvn,E27,NO}, X_{hvn,E27,SW}, X_{hvn,E27,NW}$ . Zusätzliche Operatoren  $w \in T_{2 \times 3}$  zur Wahrung des hvn-Formats sind hier nicht notwendig. Es genügen die 12 Darstellungen der Liste  $L_{12,hvn,E27,SO}$ .

Mit den  $T_{2 \times 3}$ -Bahnen der Menge  $\Omega_{hvn,E27}$  erhält man nun Darstellungen für alle 1296 · 48 normierten E27-Sudokus und anhand der 9! Ziffernpermutationen schließlich Darstellungen für alle E27-Sudokus, weiterhin sortiert nach den Richtungen SO, NO, SW, NW.

## Beispiel eines hvn-Sudokus

Für das Sudoku  $G_1^*$  ergibt sich die Darstellung  $G_1^* = (1 \cdot r_2 \cdot rr)(1 \cdot s_2 \cdot ss) G_1$

$$G_1^* = \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 8 & 7 & 5 & 6 & 4 & 9 \\ & 4 & 5 & 6 & 2 & 9 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ & 7 & 8 & 9 & 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 \\ & 3 & 1 & 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 5 & 2 \\ & 2 & 4 & 5 & 9 & 3 & 7 & 8 & 1 & 6 \\ & 9 & 6 & 8 & 4 & 2 & 1 & 9 & 2 & 4 \\ & 6 & 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 4 & 9 & 7 \\ & 8 & 9 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ & 5 & 7 & 4 & 3 & 6 & 9 & 4 & 9 & 7 \end{array}$$

## Klasseneinteilung im hvn-Format

Es gibt  $2^9 \cdot p$  dbn-Sudokus. Somit gibt es auch genau so viele hvn-Sudokus.

Wir unterscheiden 4 Klassen im hvn-Format

$K_1^*$ : In der obersten Blockzeile liegt die Ziffer 1 im Block  $b_{12}$  in der 3. Zeile und im Block  $b_{13}$  in der 2. Zeile.

In der 1. Blockspalte liegt die Ziffer 1 im Block  $b_{21}$  in der 2. Spalte und im Block  $b_{31}$  in der 3. Spalte

$K_2^*$ : In der obersten Blockzeile liegt die Ziffer 1 vertauscht zur Lage in  $K_1^*$ .

In der 1. Blockspalte liegt die Ziffer 1 ebenfalls vertauscht zur Lage in  $K_1^*$ .

$K_3^*$ : In der obersten Blockzeile liegt die Ziffer 1 vertauscht zur Lage in  $K_1^*$ .

In der 1. Blockspalte liegt die Ziffer 1 wie in der Klasse  $K_1^*$ .

$K_4^*$ : In der obersten Blockspalte liegt die Ziffer 1 wie in  $K_1^*$ .

In der 1. Blockspalte liegt die Ziffer 1 vertauscht zur Lage in  $K_1^*$ .

Generell kann man sagen:

Wenn  $A$  ein Sudoku aus  $K_1^*$  ist, so ist  $R_1 A$  ein Sudoku aus  $K_4^*$

$S_1 A$  ein Sudoku aus  $K_3^*$

$R_1 S_1 A$  ein Sudoku aus  $K_2^*$

Die Menge  $\{A, R_1 A, S_1 A, R_1 S_1 A\}$  ist die Bahn von  $A$  der Gruppe  $V_4 = \{\text{id}, R_1, S_1, R_1 S_1\}$ .

In jeder Bahn liegen 4 Elemente. Damit gibt es gemäß dem obigen Zählergebnis in jeder

Klasse  $2^7 \cdot p$  Sudokus.

### Hvn-Klassen der Extrem3\3

In jeder der vier Klassen findet man 16 Sudokus Extrem 3\3, darunter jeweils ein Superfix.

Es liegen  $U_i^{***}$  in  $K_i^*$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Dies ergibt sich für die Klasse  $K_3^*$  aus der Aufzählung der  $V_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 16\}$  im Skript

„Sudoku-Ornamente“.

In jeder Klasse liegen ferner 3 537 870834 Spreiz-Sudokus. Darunter sind in jeder Klasse 5 151600 = 2<sup>4</sup>·3<sup>5</sup>·5<sup>2</sup>·53 E54-Sudokus und 12 E27-Sudokus. Zudem findet man in jeder Klasse normale Fixsudokus. Es gibt 1 161 284 dbn-Fixsudokus und damit ebenso viele hvn-Fixsudokus. In jeder Klasse gibt es demnach 290321 Fixsudokus. Genau eines davon ist ein Superfix. In jeder Klasse gibt es somit 290320 normale Fixsudokus. Es sind 145 160 vom R-Typ und 145 160 vom S-Typ.

Zudem liegen in jeder der Klassen 9 Sudokus vom RS-Typ, 9 Sudokus vom RSS-Typ.

Dies ergibt sich aus den 36 Sudokus S<sub>i</sub> der Liste L36<sub>eee</sub> zum RS-Typ. Denn man findet:

Die ins hvn-Format transformierten Sudokus S<sub>i</sub>\* der dbn-Sudokus S<sub>i</sub> aus der Liste L36<sub>eee</sub>, i ∈ {1,...,36}, verteilen sich wie folgt auf die Klassen:

$$\begin{aligned} & \{ S_1^*, S_2^*, S_4^*, S_7^*, S_8^*, S_{12}^*, S_{14}^*, S_{20}^*, S_{22}^* \} \subset K_1^*, \\ & \{ S_{15}^*, S_{17}^*, S_{23}^*, S_{25}^*, S_{29}^*, S_{30}^*, S_{33}^*, S_{35}^*, S_{36}^* \} \subset K_2^*, \\ & \{ S_6^*, S_9^*, S_{13}^*, S_{16}^*, S_{18}^*, S_{26}^*, S_{27}^*, S_{32}^*, S_{34}^* \} \subset K_3^*, \\ & \{ S_3^*, S_5^*, S_{10}^*, S_{11}^*, S_{19}^*, S_{21}^*, S_{24}^*, S_{28}^*, S_{31}^* \} \subset K_4^*, \end{aligned}$$

Die Sudokus S<sub>i</sub>' = R<sub>1</sub> S<sub>i</sub>, i ∈ {1,...,36}, der Liste L36<sub>eee</sub> sind vom RSS-Typ. Ihre ins hvn-Format transformierten Sudokus S<sub>i</sub>'\* = (R<sub>1</sub>·S<sub>i</sub>)\* sind vom RSS-Typ. Sie verteilen sich wie folgt auf die Klassen.

$$\begin{aligned} & \{ S_3'^*, S_5'^*, S_{10}'^*, S_{11}'^*, S_{19}'^*, S_{21}'^*, S_{24}'^*, S_{28}'^*, S_{31}'^* \} \subset K_1^*, \\ & \{ S_6'^*, S_9'^*, S_{13}'^*, S_{16}'^*, S_{18}'^*, S_{26}'^*, S_{27}'^*, S_{32}'^*, S_{34}'^* \} \subset K_2^*, \\ & \{ S_{15}'^*, S_{17}'^*, S_{23}'^*, S_{25}'^*, S_{29}'^*, S_{30}'^*, S_{33}'^*, S_{35}'^*, S_{36}'^* \} \subset K_3^*, \\ & \{ S_1'^*, S_2'^*, S_4'^*, S_7'^*, S_8'^*, S_{12}'^*, S_{14}'^*, S_{20}'^*, S_{22}'^* \} \subset K_4^*, \end{aligned}$$

Zwischen den 4 Mengen vom RS-Typ im hvn-Format und den Mengen vom RSS-Typ hat man folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} R_1 \cdot \{ S_1^*, S_2^*, S_4^*, S_7^*, S_8^*, S_{12}^*, S_{14}^*, S_{20}^*, S_{22}^* \} &= \{ S_1'^*, S_2'^*, S_4'^*, S_7'^*, S_8'^*, S_{12}'^*, S_{14}'^*, S_{20}'^*, S_{22}'^* \} \\ R_1 \cdot \{ S_{15}^*, S_{17}^*, S_{23}^*, S_{25}^*, S_{29}^*, S_{30}^*, S_{33}^*, S_{35}^*, S_{36}^* \} &= \{ S_{15}'^*, S_{17}'^*, S_{23}'^*, S_{25}'^*, S_{29}'^*, S_{30}'^*, S_{33}'^*, S_{35}'^*, S_{36}'^* \} \\ R_1 \cdot \{ S_6^*, S_9^*, S_{13}^*, S_{16}^*, S_{18}^*, S_{26}^*, S_{27}^*, S_{32}^*, S_{34}^* \} &= \{ S_6'^*, S_9'^*, S_{13}'^*, S_{16}'^*, S_{18}'^*, S_{26}'^*, S_{27}'^*, S_{32}'^*, S_{34}'^* \} \\ R_1 \cdot \{ S_3^*, S_5^*, S_{10}^*, S_{11}^*, S_{19}^*, S_{21}^*, S_{24}^*, S_{28}^*, S_{31}^* \} &= \{ S_3'^*, S_5'^*, S_{10}'^*, S_{11}'^*, S_{19}'^*, S_{21}'^*, S_{24}'^*, S_{28}'^*, S_{31}'^* \} \end{aligned}$$

Zudem gibt es Zusammenhänge zwischen den 36 Sudokus S<sub>i</sub>\*, i ∈ {1,...,36}, vom Typ RS und analog Zusammenhänge zwischen den Sudokus S<sub>i</sub>'\*, i ∈ {1,...,36}, vom Typ RSS.

Beispielsweise lassen sich mit dem Operator θ = R<sub>1</sub>S<sub>1</sub> Gleichungen notieren :

$$\begin{aligned} S_{36}^* &= \theta S_1^*, S_{35}^* = \theta S_2^*, S_{30}^* = \theta S_7^*, S_{27}^* = \theta S_{10}^*, S_{26}^* = \theta S_{11}^*, S_{18}^* = \theta S_{19}^*, \\ S_{15}^* &= \theta S_{22}^*, S_{34}^* = \theta S_3^*, S_{33}^* = \theta S_4^* \text{ und } S_{16}^* = \theta S_{21}^*, S_{17}^* = \theta S_{20}^*, S_{32}^* = \theta S_5^*, \\ S_{23}^* &= \theta S_{14}^*, S_6^* = \theta S_{31}^*, S_{29}^* = \theta S_8^*, S_{13}^* = \theta S_{24}^*, S_{25}^* = \theta S_{12}^*, S_9^* = \theta S_{28}^* \end{aligned}$$

Weitere Gleichungen zwischen den S<sub>i</sub>\*, i ∈ {1,...,36}, ergeben sich durch die lokalen Operatoren (r<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>) in Verbindung mit den Zifferpermutationen π<sub>2</sub> = (47) (58) (69) bzw. π<sub>3</sub> = (23) (56) (89), kurz α<sub>2</sub> = π<sub>2</sub>·(r<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>, r<sub>1</sub>), α<sub>3</sub> = π<sub>3</sub>(s<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>, s<sub>1</sub>) notiert, sowie durch den globalen Operator θ. Die Gleichungen entsprechen den im Skript „Fixsudokus der Liste L36<sub>eee</sub>“ für die dort betrachteten dbn-Sudokus S<sub>i</sub>, i ∈ {1,...,36}, formulierten Beziehungen. Die Transformationen α<sub>2</sub>, α<sub>3</sub> bilden zusammen mit ihrem Produkt α<sub>4</sub> die kommutative Gruppe D<sub>4</sub> = {id, α<sub>2</sub>, α<sub>3</sub>, α<sub>4</sub>}. Die Elemente von D<sub>4</sub> kommutieren mit den globalen Operatoren

der Sudokugruppe  $G_0$ .

Struktureller Vermerk:

Bei den Transformationen von Sudokus anhand von Operatoren aus  $D_4$  bleibt für dbn-Sudokus mit dem Tripel  $(e,e,e)$  in der Hauptdiagonalen ihr spezielles eee-Format erhalten. Ihre Menge notieren wir  $X_{eee}$ . Die korrespondierende Menge  $X_{eee}^*$  dieser speziellen Sudokus im hvn-Format wird in konjugierter Weise ebenfalls in sich abgebildet.

Beispiel: Es ist  $\alpha_2 S_1 = S_{18}$  und es seien  $S_1^* = w_1 \cdot S_1$ ,  $S_{18}^* = w_{18} \cdot S_{18}$  mit  $w_1, w_{18} \in T_{2 \times 3}$ . Man kann dann schreiben  $S_{18}^* = w_{18} \cdot \alpha_2 \cdot w_1^{-1} \cdot S_1^*$ . Dabei sind  $S_1^* \in K_1^*$  und  $S_{18}^* \in K_3^*$  normale Fixsudokus vom RS-Typ.

Führt man analog zu den Klassen  $K_i^*$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , der hvn-Sudokus Klassen  $K_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , für dbn-Sudokus ein, so gilt für deren Teilmengen  $K_{i,eee}$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , der dbn-Sudokus im eee-Format: die Gruppe  $D_4$  operiert transitiv und treu auf dem System  $\{K_{1,eee}, K_{2,eee}, K_{3,eee}, K_{4,eee}\}$ . Das Element  $\alpha_2$  überführt beispielsweise  $K_{1,eee}$  in  $K_{3,eee}$  und  $K_{2,eee}$  in  $K_{4,eee}$  sowie beides retour. Im übertragenen Sinne gilt das dann in konjugierter Weise für das System  $\{K_{1,eee}^*, K_{2,eee}^*, K_{3,eee}^*, K_{4,eee}^*\}$ . Im Beispiel wurde  $S_1^*$  aus  $K_{1,eee}^*$  durch  $w_{18} \cdot \alpha_2 \cdot w_1^{-1}$  in  $S_{18}^*$  überführt.

Regeln zur Transformation von Fixsudokus verschiedener Typen :

Wenn das Sudoku  $A$  den Fixoperator  $wR$ ,  $w \in T_{2 \times 3}$  hat, dann hat  $R_1 A$  den Fixoperator  $wRR$ , das Sudoku  $S_1 A$  weiterhin den Fixoperator  $wR$ , das Sudoku  $R_1 S_1 A$  den Fixoperator  $wRR$ .

Wenn das Sudoku  $A$  den Fixoperator  $wS$ ,  $w \in T_{2 \times 3}$  hat, dann hat  $S_1 A$  den Fixoperator  $wSS$ , das Sudoku  $R_1 A$  weiterhin den Fixoperator  $wS$ , das Sudoku  $R_1 S_1 A$  den Fixoperator  $wSS$ .

Wenn das Sudoku  $A$  den Fixoperator  $wRS$ ,  $w \in T_{2 \times 3}$  hat, dann hat  $R_1 A$  den Fixoperator  $wRRS$ , das Sudoku  $S_1 A$  den Fixoperator  $wRSS$ , das Sudoku  $R_1 S_1 A$  den Fixoperator  $wRRSS$ .

Wenn das Sudoku  $A$  den Fixoperator  $wRSS$ ,  $w \in T_{2 \times 3}$  hat, dann hat  $R_1 A$  den Fixoperator  $wRRSS$ , das Sudoku  $S_1 A$  weiterhin den Fixoperator  $wRS$ , das Sudoku  $R_1 S_1 A$  den Fixoperator  $wRRS$ .

Entsprechendes gilt für die Fälle wo  $A$  Fixoperatoren der Form  $wRR$ ,  $wSS$ ,  $wRRS$ ,  $wRRSS$  hat.

Allgemein gilt:

Lokale Operatoren sowie Zifferpermutationen ändern den Typ eines Sudokus nicht.

Wenn  $A$  ein Fixsudoku vom R-Typ oder S-Typ ist, so sind auch  $R_1 A$  und  $S_1 A$  vom R-Typ bzw. vom S-Typ.

Wenn  $A$  vom RS-Typ ist, sind  $R_1 A$  und  $S_1 A$  vom RSS-Typ.

Wenn  $A$  vom RSS-Typ ist, sind  $R_1 A$  und  $S_1 A$  vom RS-Typ.

Wenn  $A$  vom RS-Typ ist, ist auch  $R_1 S_1 A$  vom RS-Typ.

Wenn  $A$  vom RSS-Typ ist, ist auch  $R_1 S_1 A$  vom RSS-Typ.