

Zerschneidung von Vierkantstangen, Rechteckplatten und Quadern mit ganzzahligen Kantenlängen

I Vierkantstange $S(a,1,1)$

Eine Vierkantstange $S(a,1,1)$, $a \geq 2$, $a \in \mathbb{N}$, (a Kantenlänge der Stange), hat $(a - 1)$ mögliche Schnittstellen. Hat die Stange eine Zweierpotenz als Länge, also $2^{e_K(a)}$, so kann man sie sukzessiv durch Halbieren und Aufeinanderlegen der Hälften in $e_K(a)$ Schnitten in Elementarwürfel (E-Würfel) zerlegen. $e_K(a)$ ist offensichtlich die minimale Schnitzzahl zur vollständigen Zerlegung einer Vierkantstange. Derartige aus $2^{e_K(a)}$ gebildeten Stangen nennen wir Digitstangen. Die Anzahl ihrer $a - 1$ Kontakte wird schrittweise durch das Halbierungsverfahren um folgende Anzahlen reduziert: $1, 2, 4, \dots, 2^{e_K(a)-1}$. Insgesamt sind damit $1+2+4+\dots+2^{e_K(a)-1} = 2^{e_K(a)} - 1 = a - 1$, also alle Kontakte der Stange gelöst.

Ist die Länge a einer Stange keine Zweierpotenz, so schneidet man mit dem ersten Schnitt die sich am Anfang bildende längste Digitstange aus der Gesamtstange heraus. Wir nennen sie den Digitkern $S(a_K, 1, 1)$ der Stange. Seine Länge ist $2^{e_K(a)}$. Die Länge der Reststange ist $a_R = a - 2^{e_K(a)}$, $0 \leq a_R \leq 2^{e_K(a)}$.

Die kleinste Digitstange, die die Stange a enthält, nennen wir Digithülle $S(a_H, 1, 1)$ mit $a_H = 2^{e_H(a)}$, es ist $e_H(a) = e_K(a) + 1$.

Beispiel: Eine Stange der Länge $a = 23$ hat den Digitkern der Länge $2^4 = 16$, eine Reststange der Länge 7 und die Digithülle der Länge 2^5 .

Die Reststange legt man linksbündig zum Anfang der Zählung in a -Richtung auf den Digitkern und zerlegt den Digitkern im Verbund mit der Reststange nach dem Halbierungsverfahren. Dazu braucht man $e_K(a)$ Schnitte, zusammen mit dem Trennschnitt sind es dann $e_K(a) + 1$ Schnitte, die den Stab vollständig in die E-Würfel zerlegen. Dabei hat man neben dem Kontakt zwischen dem Digitkern und der Reststange die $2^{e_K(a)} - 1$ Kontakte des Digitkerns und die $a_R - 1$ Kontakte der Reststange gelöst.

Im Beispiel $a = 23$ wird die Anzahl der 22 Kontakte um folgende Anzahlen reduziert:

1. Schnitt: Zerlegung der Stange in den Digitkern mit der Länge $2^4 = 16$ und der Reststange mit der Länge 7,
1. Halbierungsschnitt (H-Schnitt): Halbierung des Digitkerns. Da die Reststange linksbündig obenaufliegt, wird sie nicht getroffen.
2. H-Schnitt: 2 Kontakte des Digitkerns werden gelöst und 1 Kontakt der Reststange.
Es entstehen 4 Stangen der Länge 4 vom Digitkern und
1 Stange der Länge 4 und 1 Stange der Länge 3 von der Reststange.
3. H-Schnitt: 4 Kontakte des Digitkerns werden gelöst und 2 Kontakte der Reststange.
Es entstehen 8 Stangen der Länge 2 des Digitkerns und
3 Stangen der Länge 2 und 1 E-Würfel der Reststange.

4. H-Schnitt: 8 Kontakte des Digitkerns und 3 Kontakte der Reststange werden gelöst.
Es entstehen 22 E- Würfel.

Die 22 Kontakte wurden um folgende Anzahlen vermindert 1, 1+0, 2+1, 4+2, 8+3.

Die Anzahlen der gelösten Kontakte der Reststange kann man mit der zahlentheoretischen Funktion $q(n,k) = 1 + [(n - 2^k) / (2 \cdot 2^k)]$ wie folgt darstellen, dabei bezeichnet die eckige Klammer die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $(n - 2^k) / 2 \cdot 2^k$ für ganze Zahlen $n \geq -1$, $k \geq 0$.

Anzahl der schrittweisen Kontaktlösungen (L) bei Schnitten orthogonal zur a-Richtung eines Stabes $S(a,1,1)$ beim Schnitt $(1+i)$, $0 \leq i \leq e_K(a) - 1$.

Wenn $a = 2^{e_K(a)}$ ist, hat man 2^i Kontakte im Schnitt $(1+i)$ gelöst.

Wenn $a \neq 2^{e_K(a)}$ ist, hat man im Schnitt $(1+i)$ nach dem Trennschnitt

$L(a,1,1)_i = 2^i + q(a_R - 1, e_K(a) - 1 - i)$ Kontakte gelöst.

Beispiel 1 : $a = 23$, $a_K = 2^4$, $a_R = 7$, $a_H = 2^5$, $s(a) = 1$; $a_K = 2^i$, $a_R = q(6,3-i)$, $0 \leq i \leq 3$

1	
1 + 0,	$1 + [(6 - 2^3) / (2 \cdot 2^3)]$
2 + 1,	$1 + [(6 - 2^2) / (2 \cdot 2^2)]$
4 + 2,	$1 + [(6 - 2^1) / (2 \cdot 2^1)]$
8 + 3,	$1 + [(6 - 2^0) / (2 \cdot 2^0)]$

Beispiel 2 : $a = 20$, $a_K = 2^4$, $a_R = 4$, $a_H = 2^5$, $s(a) = 1$, $a_K = 2^i$, $a_R = q(3,3-i)$, $0 \leq i \leq 3$

1	
1 + 0,	$1 + [(3 - 2^3) / (2 \cdot 2^3)]$
2 + 0,	$1 + [(3 - 2^2) / (2 \cdot 2^2)]$
4 + 1,	$1 + [(3 - 2^1) / (2 \cdot 2^1)]$
8 + 2	$1 + [(3 - 2^0) / (2 \cdot 2^0)]$

Beispiel 3 : $a = 30$, $a_K = 2^4$, $a_R = 14$, $a_H = 2^5$, $s(a) = 1$, $a_K = 2^i$, $a_R = q(3,3-i)$, $0 \leq i \leq 3$

1	
1 + 1,	$1 + [(13 - 2^3) / (2 \cdot 2^3)]$
2 + 2,	$1 + [(13 - 2^2) / (2 \cdot 2^2)]$
4 + 3,	$1 + [(13 - 2^1) / (2 \cdot 2^1)]$
8 + 7,	$1 + [(13 - 2^0) / (2 \cdot 2^0)]$

Allgemein werden im Schnitt $(i+1)$ im Digitkern 2^i Kontakte und in der Reststange $a_R q(a_R - 1, e_K(a) - 1 - i)$, $0 \leq i \leq 2^{e_K(a)-1}$, Kontakte gelöst, wobei $e_K(a)$ der Exponent der Länge des Digitkerns a_K ist.

Summe der gelösten Kontakte:

$$L(a,1,1) = s(a) + 2^{e_K(a)} - 1 + s(a) \cdot (a_R - 1) = s(a) + (a_K - 1) + s(a) \cdot (a_R - 1)$$

Summe aller Schnitte: $Z(a,1,1) = s(a) + e_K(a)$, $s(a) = 0$, wenn $a = 2^{e_K(a)}$, $s(a) = 1$, wenn $a \neq 2^{e_K(a)}$ und damit $Z(a,1,1) = e_H(a)$.

Für die Summation der Werte $q(a_R - 1, e_K(a) - 1 - i)$, $0 \leq i \leq e_K(a) - 1$ wird folgende Eigenschaft der Funktion von $q(n,k)$ benutzt:

Lemma: Wenn $1 \leq k \leq 2^e$ ist, dann ist

$$\sum_{k=0}^{e-1} q(n,k) = n, \quad (\mathbf{L})$$

Begründung: für $k=0$ ist $q(n,0)$ die Anzahl der ungeraden natürlichen Zahlen kleiner, gleich n und die Summe aller $q(n,k)$ für $1 \leq k \leq e-1$ ist es die Anzahl der geraden natürlichen Zahlen kleiner, gleich n .

Im Einzelnen ergibt sich das, wie folgt:

Wenn $k = 0$, zählt der Summand 1 in $q(n,0) = 1 + [(n-1)/2]$ im Intervall $[1,n]$ die erste ungerade Zahl und der 2. Summand die Anzahl der ungeraden Zahlen im Intervall $[2,n]$.

Im Fall $k = 1$, zählt der 1. Summand in $q(n,1)$ das Vorkommen der Zahl 2 im Intervall $[1,n]$, sofern $n \geq 2$ ist und der 2. Summand in $q(n,1)$ die Anzahl der Zahlen im Intervall $[3,n]$, die durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.

Im Fall $k = 2$ zählt der 1. Summand in $q(n,2)$ das Vorkommen der Zahl 4 im Intervall $[1,n]$, sofern $n \geq 2^2$ ist und der 2. Summand in $q(n,2)$ die Anzahl der Zahlen im Intervall $[5,n]$, die durch 4 und nicht durch 8 teilbar sind.

Im Fall $(e-1)$ zählt der 1. Summand in $q(n,(e-1))$ das Vorkommen der Zahl $2^{(e-1)}$ im Intervall $[1,n]$, sofern $n > 2^{(e-1)}$ ist und der 2. Summand in $q(n,(e-1))$ die Anzahl der Zahlen im Intervall $[2^{(e-1)} + 1, n]$, die durch $2^{(e-1)}$ und nicht durch 2^e teilbar sind.

Wegen $n < 2^e$ gibt es solche Zahlen nicht, denn im Intervall $[2^{(e-1)} + 1, n]$ ist die auf $2^{(e-1)}$ folgende Zahl mit dem Primärteiler $2^{(e-1)}$, d.h. die Zahl $3 \cdot 2^{(e-1)} > 2^e$.

In allen Fällen $1 \leq k \leq (e-1)$ mit $n = 2^k$ ist der 2. Summand in q gleich Null.

In allen Fällen $1 \leq k \leq (e-1)$ mit $n < 2^k$ ist der 2. Summand in q gleich (-1) , und damit $q(n,k) = 0$.

Die Summe aller $q(n,k)$, $0 \leq k \leq e-1$, zählt alle ungeraden Zahlen und alle durch 2 teilbaren Zahlen der Menge $\{1,2,3,\dots,n\}$.

Satz 1: Zur vollständigen Zerlegung einer Stange $S(a,1,1)$ in E-Würfel ist $Z(a,1,1) = s(a) + e_K(a) = e_H(a)$ die Mindestzahl der Schnitte, $s(a) = 0$, wenn $a = 2^{e_K(a)}$, $s(a) = 1$, wenn $a > 2^{e_K(a)}$. Im Fall, dass die Länge von a eine Zweierpotenz ist, ist offensichtlich $e_K(a) = e_H(a)$.

Begründung:

Zur Herauslösung der Stange $S(a_k,1,1)$ benötigt man keinen bzw. einen Schnitt, formal $s(a)$ Schnitte, $s(a) \in \{0,1\}$. Zur Zerlegung des Kerns benötigt man - wie man leicht sieht - mehr als $e_K(a)$ Schnitte, wenn man nicht bei jedem Schnitt stets alle entstandenen Teile halbiert.

Alternatives Auflisten der gelösten Kontakte.

Die Stange $S(a,1,1)$ ist ein Verbund von a E-Würfeln w_α . Zwischen den Würfeln $w_\alpha, w_{\alpha+1}$ liegt der Kontakt K_α . Die Würfel haben $(a-1)$ Kontakte $K_\alpha, 1 \leq \alpha \leq a-1$.

Im „Schnittverbund“ $i, i < e_H(a)$, werden alle Kontakte K_α gelöst, deren Indices $\alpha(i)$ die Zahl $2^{e_H(a)-i}$ als Primärteiler haben, $1 \leq i \leq e_H(a) - 1$. Im Fall $i = e_H(a)$ sind es die ungeraden Zahlen. Für jedes i sind es die Produkte der Form $n \cdot 2^{e_H(a)-i}$, n ungerade, $2^{e_H(a)-i} < 2^{e_H(a)}$.

Insgesamt hat man nach **(L)** mit $e_H(a)$ Schnittverbänden $(a-1)$ Kontakte gelöst.

Beispiel: $a = 23$, $a - 1 = 22$, $1 \leq i \leq 5$

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| 1. Schnitt: $K_{16}(2^{5-1})$ | $\{16\}$ |
| 2. Schnitt: $K_8(2^{5-2})$ | $\{8\}$ |
| 3. Schnittverbund: $K_4(2^{5-3})$ | $\{4, 12, 20\}$ |
| 4. Schnittverbund: $K_2(2^{5-4})$ | $\{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$ |
| 5. Schnittverbund: $K_1(2^{5-5})$ | $\{1, 3, 5, \dots, 21\}$ |

II Rechteckplatten $R(a,b,1)$

Rechteckplatten $R(a,b,1)$ mit ganzzahligen Kantenlängen a, b sind ein Verbund von a Vierkantstangen der Länge b und damit ein Verbund von $a \cdot b$ E-Würfeln, $a > 1, b > 1$.

Rechteckplatten, deren Kantenlängen Potenzen von 2 sind, nennen wir Digitplatten. Die größte Digitplatte in einer vorgelegten Rechteckplatte ist der Digitkern $R(a_K, 1, 1)$ der Platte. Die kleinste Digitplatte, die die Rechteckplatte enthält, ist die Gigithülle $R(a_H, b_H, 1)$.

Es ist $e_H(a) = e_K(a)$, falls die Länge von a eine Zweierpotenz ist, anderenfalls ist $e_H(a) = e_K(a) + 1$. Entsprechend ist $e_H(b) = e_K(b)$, falls die Länge von b eine Zweierpotenz ist. Anderenfalls ist $e_H(b) = e_K(b) + 1$.

Zur Sondierung des Digitkerns in der Platte benötigt man 2 Schnitte, einen Schnitt orthogonal zur a -Richtung und einen Schnitt orthogonal zur b -Richtung, wenn keine der Kantenlängen eine Potenz von 2 ist.

Wenn entweder die Länge von a oder die von b eine Potenz von 2 ist, benötigt man einen Schnitt. Wenn sowohl die Länge von a sowie die von b eine Potenz von 2 ist, benötigt man keinen Trennschnitt.

Die Zerlegung einer Rechteckplatte in E-Würfel kann man offensichtlich stets durch $(a - 1)$ Schnitte parallel zur Kante b in a Stangen der Länge b und anschließend – ohne die Lage der Stangen zu verändern – durch $(b - 1)$ Schnitte parallel zur Kante a in $a \cdot b$ E-Würfel zerlegen.

Algorithmus für eine minimale Schnitzzahl.

1. Schnitte orthogonal zur Richtung von a .

1,1) Länge von a ist eine Potenz von 2: $a = 2^{e_K(a)}$.

Analog zur Zerlegung einer Stange in Würfel, kann man die Zerlegung der Platte in a Stangen der Länge b durch $e_K(a)$ Schnitten bewirken. Der 1. Schnitt halbiert die Fläche orthogonal zu a und man lagert den hinteren Teil auf den vorderen. Man halbiert den Stapel erneut und lagert den hinteren Teil wiederum auf den vorderen, u. s. w..

Der Reihe nach hat man $b, 2b, 4b, 8b, \dots, 2^{e_K(a)-1}b$ E-Würfelkontakte gelöst.

Insgesamt hat man also $L_a(a,b,1) = b \cdot (2^{e_K(a)} - 1) = b \cdot (a - 1)$ mit $Z_a(a,b,1) = e_K(a)$ Schnitten gelöst.

1,2) Länge von a ist keine Potenz von 2.

Im 1. Schnitt trennt man die Platte in eine Platte mit den Kantenlängen a_K und b und einem Rest a_R mit den Kantenlängen $a_R = a - a_K$ und b .

Für den 1. H-Schnitt lagert man den Rest a_R linksbündig zum Anfang der Zählung in a -Richtung auf den ersten Teil und halbiert mit diesem Schnitt den unteren Teil.

Auf diese Weise fährt man fort. Mit $e_K(a)$ Schnitten nach dem Sonderschnitt, insgesamt also mit $e_K(a) + 1$ Schnitten, hat man die Platte in a Stangen der Länge b zerlegt.

Im Sonderschnitt werden b Kontakte gelöst.

Im Schnitt $(1+i)$, $0 \leq i \leq e_K(a) - 1$, werden

$L_a(a,b,1)_i = b \cdot L_a(a,1,1)_i = b \cdot (2^i + q(a_R - 1, e_K(a) - 1 - i))$ Kontakte gelöst, $0 \leq i \leq e_K(a) - 1$.

Zusammengenommen werden

$L_a(a,b,1) = b \cdot L_a(a,1,1) = b \cdot (1 + (a_K - 1) + (a_R - 1)) = b \cdot (a - 1)$. Kontakte gelöst.

Anzahl der Schnitte $Z_a(a,b,1) = s(a) + e_K(a) = e_H(a)$, $s(a) = 1$

2. Schnitte orthogonal zur Richtung von b.

Die Vierkantstäbe der Länge a bringen wir in die ursprüngliche Lage.

2,1) Länge von b ist eine Potenz von 2: $b = 2^{e_K(b)}$.

Der 1. Schnitt halbiert die Stäbe orthogonal zu b und man lagert den hinteren Teil auf den vorderen. Man halbiert den Stapel erneut und lagert den hinteren Teil wiederum auf den vorderen, u. s. w..

Der Reihe nach hat man a, 2a, 4a, 8a, ..., $2^{e_K(b)-1} a$ E-Würfelkontakte gelöst.

Insgesamt also werden

$L_b(a,b,1) = a \cdot (1+2+4+8+\dots+2^{e_K(b)-1}) = a \cdot (2^{e_K(b)} - 1) = a \cdot (b - 1)$ mit $Z_b(a,b,1) = e_K(b)$ Schnitten gelöst.

2,2) Länge von b ist keine Potenz von 2.

Der 1. Schnitt trennt die Stangen in a Stangen der Länge b_K und a Stangen der Länge b_R . Es wurden a Kontakte gelöst.

Für den 1. H- Schnitt lagert man die a Stangen der Länge b_R neben die Stangen der Länge b_K , fußend auf den Anfang der Zählung in b-Richtung.

Der 1. H-Schnitt löst a Kontakte der Stangen der Länge b_K und $q(b_R - 1, e_K(b) - 1)$ vom Rest, Man wiederholt das Verfahren. Mit $e_K(b)$ Schnitten nach dem Sonderschnitt, insgesamt also mit $e_K(b) + 1 = e_H(b)$ Schnitten, hat man die Stangen in a·b Würfel zerlegt.

Im Sonderschnitt werden a Kontakte gelöst.

Im Schnitt $(1+i)$, $0 \leq i \leq e_K - 1$, werden

$L_b(a,b,1)_i = a \cdot L_b(1,b,1)_i = a \cdot (2^i + q(b_R - 1, e_K(b) - 1 - i))$ Kontakte gelöst.

Zusammengenommen werden

$L_b(a,b,1) = a \cdot (1 + (b_K - 1) + b_R - 1) = a \cdot (b - 1)$ Kontakte gelöst.

Anzahl der Schnitte $Z_b(a,b,1) = e_H(b)$, $s(b) = 1$.

Insgesamt hat man mit $Z(a,b,1) = Z_a(a,b,1) + Z_b(a,b,1) = s(a) + e_K(a) + s(b) + e_K(b) = e_H(a) + e_H(b)$ Schnitten $L(a,b,1) = L_a(a,b,1) + L_b(a,b,1) = b \cdot (a - 1) + a \cdot (b - 1) = 2a \cdot b - a - b$ Kontakte gelöst.

Das sind alle Kontakte in der Platte, den die a·b Würfel haben.

Von den $6 \cdot a \cdot b$ Flächen liegen $2 \cdot a \cdot b + 2a + 2b$ an der Oberfläche der Platte. Die Differenz ist die Anzahl der Flächen, die paarweise im Innern der Platte kontaktieren und damit $(3ab - ab - a - b) = (2ab - a - b)$ Kontakte bilden.

Satz 2: Zur vollständigen Zerlegung einer Rechteckplatte $R(a,b,1)$ in Elementarwürfel benötigt man mindestens $Z(a,b,1) = e_H(a) + e_H(b)$ Schnitte,

Begründung: Zur Herausstrennung des Digitkerns $R(a_K, b_K, 1)$ aus der Platte $R(a,b,1)$ benötigt man $s(a) + s(b)$ Schnitte.

Zum Zerlegen des Kerns in E-Würfel benötigt man mehr als $e_K(a) + e_K(b)$ Schnitte, wenn man nicht – wie man leicht sieht – bei jedem Schnitt orthogonal zur a-Richtung als auch für jeden Schnitt orthogonal zur b-Richtung die entstandenen Teile halbiert.

Alternatives Auflisten der gelösten Kontakte.

Eine Rechteckplatte ist ein Verbund von $a \cdot b$ Würfeln $w_{\alpha,\beta}$, $1 \leq \alpha \leq a$, und w_β , $1 \leq \beta \leq b$. Zwischen den Würfeln $w_{\alpha,\beta}$ und $w_{\alpha+1,\beta}$ liegt orthogonal zur Richtung von a der Kontakt $K_{a;\alpha,\beta}$, $1 \leq \alpha \leq a - 1$, $1 \leq \beta \leq b$. Zwischen den Würfeln $w_{\alpha,\beta}$ und $w_{\alpha,\beta+1}$ liegt orthogonal zur Richtung von b der Kontakt $K_{b;\alpha,\beta}$, $1 \leq \alpha \leq a$, $1 \leq \beta \leq b - 1$.

Im „Schnittverbund“ i , $i < e_H(a)$, orthogonal zur Richtung von a werden alle Kontakte $K_{a;\alpha(i),\beta}$ gelöst, deren Indices $\alpha(i)$ die Zahl $2^{e_H(a)-i}$ als Primärteiler haben, $1 \leq i \leq e_H(a) - 1$. Im Fall $i = e_H(a)$ sind die Indices von α alle ungeraden Zahlen, $1 \leq i \leq a - 1$. Im „Schnittverbund“ i werden $q = b \cdot q(a - 1, e_H(a) - i)$ Kontakte gelöst.

Im „Schnittverbund“ i , $i < e_H(b)$, orthogonal zur Richtung von b werden alle Kontakte $K_{b;\alpha,\beta(i)}$ gelöst, deren Indices $\beta(i)$ die Zahl $2^{e_H(b)-i}$ als Primärteiler haben, $1 \leq i \leq e_H(b) - 1$. Im Fall $i = e_H(b)$ sind die Indices von β alle ungeraden Zahlen, $1 \leq i \leq b - 1$. Im „Schnittverbund“ i werden $q = a \cdot q(b - 1, e_H(b) - i)$ Kontakte gelöst. Zusammengenommen sind das bei Schnitten orthogonal zu a nach **(L)** $b(a - 1)$ Kontaktlösungen, bei Schnitten orthogonal zu b sind es nach **(L)** $a(b - 1)$ Kontaktlösungen. Insgesamt hat man $b(a - 1) + a(b - 1) = 2ab - a - b$ Kontaktlösungen bei $e_H(a) + e_H(b)$ Schnittverbänden.

III Quader Q(a,b,c)

Quader Q(a,b,c) mit ganzzahligen Kantenlängen a, b, c sind ein Verbund von a Rechteckplatten $R_a(1,b,c)$ mit den Kanten b und c, und damit ein Verbund von $a \cdot b \cdot c$ E-Würfeln.

Die Rechteckplatten sind ein Verbund von b Stangen $S_{a,b}(1,1,c)$ der Länge c und damit ein Verbund von $b \cdot c$ E-Würfeln.

Den größten Quader in einem gegebenen Quader dessen Kantenlängen Potenzen von 2 sind, nennt man Digitkern des Quaders.

Den kleinsten Digitquader, der den Quader enthält, ist die Digithülle des Quaders $R(a_K, b_H, c_H)$. Es ist $e_H(a) = e_K(a)$, falls die Länge von a eine Zweierpotenz ist, anderenfalls ist $e_H(a) = e_K(a) + 1$. Entsprechend ist $e_H(b) = e_K(b)$, falls die Länge von b eine Zweierpotenz ist, anderenfalls ist $e_H(b) = e_K(b) + 1$ und $e_H(c) = e_K(c)$, falls die Länge von c eine Zweierpotenz ist, anderenfalls ist $e_H(c) = e_K(c) + 1$.

Für die Seitenlängen kann man formal schreiben

$$\begin{aligned} a &= a_K + a_R, & a_K &= 2^{e_K(a)}, & a_R &= a - 2^{e_K(a)}, & 1 < a_K &\leq a, & 0 \leq a_R < a_K, \\ b &= b_K + b_R, & b_K &= 2^{e_K(b)}, & b_R &= b - 2^{e_K(b)}, & 1 < b_K &\leq b, & 0 \leq b_R < b_K, \\ c &= c_K + c_R, & c_K &= 2^{e_K(c)}, & c_R &= c - 2^{e_K(c)}, & 1 < c_K &\leq c, & 0 \leq c_R < c_K. \end{aligned}$$

Wenn $a_K = a$ ist, ist $a_R = 0$, analog für die Seiten b, c.

Algorithmus für eine minimale Schnitzzahl.

1.) Schnitte orthogonal zur Richtung von a.

1,1) Die Länge von a ist eine Potenz von 2, $a = 2^{e_K(a)}$

Der 1. Schnitt halbiert den Quader orthogonal zu a und man verschiebt den hinteren Teil parallel zum Anfang der a-Zählung. Man halbiert den Stapel erneut, u. s. w.. Der Reihe nach hat man a Platten mit den Kantenlängen b, c erhalten. Man hat damit $b \cdot c \cdot (2^{e_K(a)} - 1) = b \cdot c \cdot (a - 1)$ Kontakte mit $Z_a(a,b,c) = e_H(a)$ Schnitten gelöst.

1,2) Die Länge von a ist keine Potenz von 2.

Im Sonderschnitt trennt man den Quader in einen Quader mit den Kantenlängen $a_K = 2^{e_K(a)}$, b, c und einen Rest a_R mit den Kantenlängen $a_R = a - 2^{e_K(a)}$, b, c, $a \geq 1$. Man verschiebt den hinteren Teil linksbündig parallel zum Anfang der Zählung in a-Richtung und halbiert mit dem 1. Halbierungsschnitt den vorderen Quader im Verbund mit dem verschobenen Quader. In analoger Weise fährt man mit den Halbierungsschnitten des vorderen Teils im Verbund mit den verschobenen Teilen fort.

Mit $e_K(a) - 1$ Schnitten nach dem Sonderschnitt, insgesamt also mit $e_K(a)$ Schnitten, hat man den Quader in a Platten mit den Kantenlängen b, c zerlegt.

Im Sonderschnitt werden $b \cdot c$ Kontakte gelöst.

Im H-Schnitt $(1+i)$, $0 \leq i \leq e_K(a) - 1$ werden

$L_a(a,b,c)_i = b \cdot c \cdot (2^i + q(a_R - 1, e_K(a) - 1 - i))$ Kontakte gelöst.

Zusammengenommen werden

$L_a(a,b,c) = b \cdot c \cdot L(a,1,1) = b \cdot c \cdot (1 + (a_K - 1) + (a_R - 1)) = b \cdot c \cdot (a - 1)$ Kontakte gelöst.

Anzahl der Schnitte orthogonal zu a: $Z_a(a,b,c) = s(a) + e_K(a)$ mit $s(a) = 1$, also $Z(a,b,c) = e_H(b)$.

2.) Schnitte orthogonal zur Richtung von b.

Die Platten werden in ihre ursprüngliche Quaderlage gebracht.

2,1) Die Länge von b ist eine Potenz von 2: $b = 2^{e_K(b)}$

Der 1. Schnitt halbiert die Platten orthogonal zu b und man verschiebt den hinteren Teil parallel zum Anfang der b-Zählung und halbiert den Stapel erneut und fährt analog fort.

Aus den Platten $R(1,b,c)$ werden nun $a \cdot b$ Stäbe $S(1,1,c)$ der Länge c durch

$Z_b(a,b,c) = e_K(b) = e_H(b)$ Schnitte gelöst.

Es wurden $L_b(a,b,c) = a \cdot c \cdot (2^{e_K(b)} - 1) = a \cdot c \cdot (b - 1)$ Kontakte gelöst.

2,2) die Länge von b ist keine Potenz von 2.

Im Sonderschnitt trennt man die a Platten in Platten mit den Kantenlängen

$b_K = 2^{e_K(b)}$, c und einen Rest b_R mit den Kantenlängen $b_R = b - 2^{e_K(b)}$, c, $b_R \geq 1$

Es werden $a \cdot c$ Kontakte gelöst.

Man verschiebt den hinteren Teil linksbündig parallel zum Anfang der Zählung in b-Richtung und halbiert mit dem 1. Halbierungsschnitt den vorderen Teil im Verbund mit dem verschobenen Teil. In analoger Weise fährt man mit den Halbierungsschnitten des vorderen Teils im Verbund mit den verschobenen Teilen fort.

Mit $Z_b(a,b,c) = s(b) + e_K(b)$, $s(b) = 1$, also $Z_b(a,b,c) = e_H(b)$ Schnitten sind die Platten in $a \cdot b$ Stäbe $S(1,1,c)$ zerlegt worden.

Im H-Schnitt $(1+i)$, $0 \leq i \leq e_K(b) - 1$ werden

$L_b(a,b,c)_i = a \cdot c \cdot (2^i + q(b_R - 1, e_K(b) - i))$ Kontakte gelöst.

Zusammengenommen werden

$L_b(a,b,c) = a \cdot c \cdot L(1,b,1) = a \cdot c \cdot (1 + (b_K - 1) + (b_R - 1)) = a \cdot c \cdot (b - 1)$ Kontakte gelöst.

3.) Schnitte orthogonal zur Richtung von c.

Die Stäbe $S(1,1,c)$ werden in ihre ursprüngliche Quaderlage gebracht.

2,1) Die Länge von c ist eine Potenz von 2: $b = 2^{e_K(c)}$.

Der 1. H-Schnitt halbiert die Stäbe und man verschiebt den hinteren Teil parallel zum Anfang der c-Zählung. Man halbiert den Stapel erneut und fährt analog fort. Aus den ab Stäben $S(1,1,c)$ entstehen nun $a \cdot b \cdot c$ E-Würfel durch $Z_c(a,b,c) = e_K(c) = e_H(c)$ Schnitte.

2,2) Die Länge von c ist keine Potenz von 2.

Im Sonderschnitt trennt man die $a \cdot b$ Stäbe $S(1,1,c)$ in Stäbe mit den Längen $c_K = 2^{e_K(c)}$ und einen Rest $c_R = c - c_K$, $c_R \geq 1$. Es werden $a \cdot b$ Kontakte gelöst.

Man verschiebt die Reststücke in ihrer Stabrichtung zum Boden, dem Anfang der Zählung in c-Richtung. Mit dem 1. H-Halbierungsschnitt halbiert man das Kernstück im Verbund mit dem Reststück. In den folgenden H-Schnitten werden analog jeweils vor dem nächsten H-Schnitt die oberen Teile nach unten verlagert zum Anfang der c-Zählung.

Nach $Z_c(a,b,c) = s(c) + e_K(c)$, $s(c) = 1$, also $Z_c(a,b,c) = e_H(c)$ Schnitten sind die ab Stäbe in $a \cdot b \cdot c$ E-Würfel zerlegt.

Im Schnitt $(1+i)$, $0 \leq i \leq e_K(c) - 1$ werden

$L_c(a,b,c)_i = a \cdot b \cdot (2^i + q(c_R - 1, e_K(c) - 1 - i))$ Kontakte gelöst.

Zusammengenommen werden

$L_c(a,b,c) = a \cdot b \cdot L(1,1,c) = a \cdot b \cdot (1 + (c_K - 1) + (c_R - 1)) = a \cdot b \cdot (c - 1)$ Kontakte gelöst.

Insgesamt hat man mit

$Z(a,b,c) = Z_a + Z_b + Z_c = e_H(a) + e_H(b) + e_H(c)$ Schnitten

$b \cdot c \cdot (a - 1) + a \cdot c \cdot (b - 1) + a \cdot b \cdot (c - 1) = 3 \cdot a \cdot b \cdot c - b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b$ Kontakte gelöst.

Satz 3: Zur vollständigen Zerlegung eines Quaders $Q(a,b,c)$ in E-Würfel benötigt man mindestens $Z(a,b,c) = e_H(a) + e_H(b) + e_H(c)$ Schnitte,

Begründung:

Zum Herausstreifen des Digitkerns $Q(a_K, b_K, c_K)$ aus dem Quader $Q(a,b,c)$ benötigt man $s(a) + s(b) + s(c)$ Schnitte.

Zum Zerlegen des Digitkerns in E-Würfel benötigt man – wie man leicht sieht – mehr als $e_K(a) + e_K(b) + e_K(c)$ Schnitte, wenn man nicht bei jedem Schnitt orthogonal zur a-Richtung als auch zur b-Richtung als auch zur c-Richtung die entstandenen Teile halbiert.

Beispiel: $Q(20,15,4)$ mit 1200 E-Würfeln.

1) Schnitte orthogonal zur a-Richtung.

Der Sonderschnitt $s(a) = 1$ teilt den Quader $Q(20,15,4)$ in einen Quader $Q_K(2^4, 15, 4)$ und einen Restquader $Q_R(4,15,4)$, gelöste Kontakte $15 \cdot 4 = 60$.

Im H-Schnitt $(1+i)$ werden $L_a = 15 \cdot 4 \cdot (2 + 1 + [(3 - 2^{3-i}) / 2 \cdot 2^{3-i}])$ Kontakte gelöst, $0 \leq i \leq 3$.

$$\begin{aligned}
i = 0 & \quad 60 \cdot (1 + 1 - 1) = 60 \\
i = 1 & \quad 60 \cdot (2 + 1 - 1) = 120 \\
i = 2 & \quad 60 \cdot (4 + 1 + 0) = 300 \\
i = 3 & \quad 60 \cdot (8 + 1 + 1) = 600
\end{aligned}$$

Es wurden $L_a = 1140$ Kontakte mit $Z_a = 1+4 = e_H(a)$ Schnitten gelöst.

Man hat 20 Platten $R(1,15,4)$ erhalten, die in die ursprüngliche Lage gebracht werden.

2) Schnitte orthogonal zur b-Richtung.

Der Sonderschnitt $s(b) = 1$ teilt die Platten in 20 Platten $R(1, 2^3, 4)$ und 20 Platten $R(1,7,4)$.

Im H-Schnitt $(1+i)$ werden $L_b = 20 \cdot 4 \cdot (2 + 1 + [(6 - 2^{2-i}) / 2 \cdot 2^{2-i}])$ Kontakte gelöst, $0 \leq i \leq 2$.

$$\begin{aligned}
i = 0 & \quad 80 \cdot (1 + 1 + 1) = 240 \\
i = 1 & \quad 80 \cdot (2 + 1 + 1) = 240 \\
i = 2 & \quad 80 \cdot (4 + 1 + 2) = 560
\end{aligned}$$

Es wurden $L_{ab} = 1040$ Kontakte mit $Z_b = 1+3 = e_H(b)$ Schnitten gelöst.

3) Schnitte orthogonal zur c-Richtung.

Ein Sonderschnitt ist nicht erforderlich, weil $c = 2^2$ und somit $s(c) = 0$ ist.

Im H-Schnitt $(1+i)$ werden $L_c = 20 \cdot 15 \cdot 2^i$ Kontakte gelöst, $0 \leq i \leq 1$.

$$\begin{aligned}
i = 0 & \quad 20 \cdot 15 \cdot 1 = 300 \\
i = 1 & \quad 20 \cdot 15 \cdot 2 = 600
\end{aligned}$$

Es wurden $L_c = 900$ Kontakte mit $Z_c = 2 = e_H(c)$ Schnitten gelöst..

Man hat $20 \cdot 15 \cdot 4 = 1200$ E-Würfel erhalten.

Zusammengenommen wurden mit

$$Z(20, 15, 4) = e_H(a) + e_H(b) + e_H(c) = 1+4+1+3 + 0 + 2 = 11 \text{ Schnitten}$$

$$L(20, 15, 4) = (60+1080) + (80+1040) + 900 = 3160 \text{ Kontakte gelöst und damit alle}$$

$$L(a,b,c) = 3 \cdot a \cdot b \cdot c - b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b \text{ Kontakte.}$$

Alternatives Auflisten der gelösten Kontakte.

Eine Quader ist ein Verbund von abc Würfeln $w_{\alpha,\beta,\chi}$, $1 \leq \alpha \leq a$, $1 \leq \beta \leq b$, $1 \leq \chi \leq c$.

Zwischen den Würfeln $w_{\alpha,\beta,\chi}$ und $w_{\alpha+1,\beta,\chi}$ liegt orthogonal zur Richtung von a der Kontakt $K_{a;\alpha,\beta,\chi}$, $1 \leq \alpha \leq a - 1$, $1 \leq \beta \leq b$, $1 \leq \chi \leq c$.

Zwischen den Würfeln $w_{\alpha,\beta,\chi}$ und $w_{\alpha,\beta+1,\chi}$ liegt orthogonal zur Richtung von b der Kontakt $K_{b;\alpha,\beta,\chi}$, $1 \leq \alpha \leq a$, $1 \leq \beta \leq b - 1$, $1 \leq \chi \leq c$.

Zwischen den Würfeln $w_{\alpha,\beta,\chi}$ und $w_{\alpha,\beta,\chi+1}$ liegt orthogonal zur Richtung von c der Kontakt $K_{c;\alpha,\beta,\chi}$, $1 \leq \alpha \leq a$, $1 \leq \beta \leq b$, $1 \leq \chi \leq c - 1$.

Im „Schnittverbund“ i , $i < e_H(a)$, orthogonal zur Richtung von a werden alle Kontakte $K_{a;\alpha(i),\beta,\chi}$ gelöst, deren Indices $\alpha(i)$ die Zahl $2^{e_H(a)-i}$ als Primärteiler haben, $1 \leq i \leq e_H(a) - 1$.

Im Fall $i = e_H(a)$ sind die Indices von α alle ungeraden Zahlen, $1 \leq i \leq a - 1$.

Im „Schnittverbund“ i werden $q = b \cdot c \cdot q(a - 1, e_H(a) - i)$ Kontakte gelöst.

Im „Schnittverbund“ i , $i < e_H(b)$, orthogonal zur Richtung von b werden alle Kontakte

$K_{b;\alpha,\beta(i),\chi}$ gelöst, deren Indices $\beta(i)$ die Zahl $2^{e_H(b)-i}$ als Primärteiler haben, $1 \leq i \leq e_H(b) - 1$.

Im Fall $i = e_H(b)$ sind die Indices von β alle ungeraden Zahlen, $1 \leq i \leq b - 1$.

Im „Schnittverbund“ i werden $q = a \cdot c \cdot q(b - 1, e_H(b) - i)$ Kontakte gelöst.

Im „Schnittverbund“ i , $i < e_H(c)$, orthogonal zur Richtung von c werden alle Kontakte $K_{c;\alpha,\beta,\chi(i)}$, gelöst, deren Indices $\chi(i)$ die Zahl $2^{e_H(c)-i}$ als Primärteiler haben, $1 \leq i \leq e_H(c) - 1$.
 Im Fall $i = e_H(c)$ sind die Indices von χ alle ungeraden Zahlen, $1 \leq i \leq c - 1$.
 Im „Schnittverbund“ i werden $q = a \cdot b \cdot q(c - 1, e_H(c) - i)$ Kontakte gelöst.

Zusammengenommen sind das bei Schnitten orthogonal zu a nach **(L)** $b \cdot c \cdot (a - 1)$ Kontaktlösungen, bei Schnitten orthogonal zu b sind es nach **(L)** $a \cdot c \cdot (b - 1)$ Kontaktlösungen, bei Schnitten orthogonal zu c sind es nach **(L)** $a \cdot b \cdot (c - 1)$ Kontaktlösungen.

Insgesamt hat man $b \cdot c \cdot (a - 1) + a \cdot c \cdot (b - 1) + a \cdot b \cdot (c - 1) = 3 \cdot a \cdot b \cdot c - b \cdot c - a \cdot c - a \cdot b$ Kontaktlösungen bei $e_H(a) + e_H(b) + e_H(c)$ Schnittverbänden.

Beispiel: Q(20,15,4) mit 1200 E-Würfeln.

Der Quader Q mit $a = 20$, $b = 15$, $c = 4$ hat insgesamt $3 \cdot a \cdot b \cdot c - a \cdot b - a \cdot c - a \cdot b = 3 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 4 + 20 \cdot 15 + 20 \cdot 4 + 15 \cdot 4 = 3160$ Kontakte.

$Q(20,15,4)$, $e_H(a) = 5$, $e_H(b) = 4$, $e_H(c) = 2$.

Schnittverbände orthogonal zur Richtung von a : $K_{a;\alpha(i),\beta,\chi}$, mit $\alpha(i) = 2^{5-i}$, $1 \leq i \leq 5$.

- $\alpha(1) \in \{16\}$
- $\alpha(2) \in \{8\}$
- $\alpha(3) \in \{4,12\}$
- $\alpha(4) \in \{2,6,10,14,18\}$
- $\alpha(5) \in \{1,3,\dots,17,19\}$

Anzahl der gelösten Kontakte: $b \cdot c \cdot (q(19,4) + q(19,3) + q(19,2) + q(19,1) + q(19,0)) =$
 $15 \cdot 4 \cdot (1 + 1 + 2 + 5 + 10) = 1140$

Schnittverbände orthogonal zur Richtung von b : $K_{b;\alpha,\beta(i),\chi}$, mit $\beta(i) = 2^{4-i}$, $1 \leq i \leq 4$.

- $\beta(1) \in \{8\}$
- $\beta(2) \in \{4,12\}$
- $\beta(3) \in \{2,6,10,14\}$
- $\beta(4) \in \{1,3,\dots,11,13\}$

Anzahl der gelösten Kontakte: $a \cdot c \cdot (q(14,3) + q(14,2) + q(14,1) + q(14,0)) =$
 $20 \cdot 4 \cdot (1 + 2 + 4 + 7) = 1120$

Schnittverbände orthogonal zur Richtung von c : $K_{c;\alpha,\beta,\chi(i)}$, mit $\chi(i) = 2^{2-i}$, $1 \leq i \leq 2$.

- $\chi(1) \in \{2\}$
- $\chi(2) \in \{1,3\}$

Anzahl der gelösten Kontakte: $a \cdot b \cdot (q(3,1) + q(3,0) + q(14,1)) =$
 $20 \cdot 15 \cdot (1 + 2) = 900$

Zusammengenommen sind durch $e_H(a) + e_H(b) + e_H(c) = 5 + 4 + 2 = 11$ Schnittverbände $(a - 1) \cdot b \cdot c + (b - 1) \cdot a \cdot c + (c - 1) \cdot a \cdot b = 1140 + 1120 + 900 = 3160$ Kontakte gelöst worden.

Anhang:

Dualdarstellung der Kontaktlösungen im Beispiel S(23,1,1).

In der Dualzahldarstellung $\sum \delta_\mu 2^\mu$ der Indices $\alpha, \mu \in \{0, 1, \dots, e(a)-1\}$, ist $\delta_\mu = 1$, wenn $\mu = e_H(a) - i$ ist, an den Stellen davor ist $\delta_\mu = 0$, an den Stellen danach derart, dass die dargestellte Zahl kleiner oder gleich $(a - 1)$ ist.

Beispiel: $a = 23$, $a - 1 = 22$, $1 \leq i \leq 5$

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|---|
| 1. Schnitt: $K_{16}(2^{5-1})$ | $\{16\}$ | alias $\langle 00001 \rangle$ |
| 2. Schnitt: $K_8(2^{5-2})$ | $\{8\}$ | alias $\langle 00010 \rangle$ |
| 3. Schnittverbund: $K_4(2^{5-3})$ | $\{4, 12, 20\}$ | alias $\langle 001, 0011, 00101 \rangle$ |
| 4. Schnittverbund: $K_2(2^{5-4})$ | $\{2, 6, 10, 14, 18, 22\}$ | alias $\langle 01, 011, 0101, 0111, 01001, 01101 \rangle$ |
| 5. Schnittverbund: $K_1(2^{5-5})$ | $\{1, 3, 5, \dots, 21\}$ | alias $\langle 1, 11, 101, \dots, 10101 \rangle$ |

Modellierungen des Zerschneidungsverfahrens in Vektorräumen

1) Modellierung im Vektorraum der reellen Zahlen $\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}$

Wir betrachten eine gerichtete Strecke $a \cdot e_1$ (a ganzzahlig) als Menge der Ortsvektoren

$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$
 $a \cdot e_1 = 01 + 12 + 23 + \dots + (a-1)a = \{e_{1,\alpha} ; 1 \leq \alpha \leq a\}$. $e_{1,\alpha}$ ist der Ortsvektor an der Stelle $O + (\alpha-1)e_1$ (O ist der Ursprung des Koordinatensystems).

Durch das Zerschneidungsverfahren wird im 1. Schnitt an der Stelle $O + 2^{e_H(a)} e_1$ die Menge in $1 + q(a-1, e_H(a)-1) = 2$ Mengen $\{e_{1,\alpha} ; 1 \leq \alpha \leq e_H(a)-1\}$ und $\{e_{1,\alpha} ; e_H(a) \leq \alpha \leq a-1\}$ zerlegt. Im 2. Schnitt ist $q(a-1, e_H(a)-2) = 1$ oder 2 . Abhängig davon erhält man 3 oder 4 Teilmengen. Allgemein erhält man also $1 + q(a-1, e_H(a)-1) + q(a-1, e_H(a)-2)$ Teilmengen.

Nach $e_H(a)$ Schnittverbänden hat man die Menge $\{e_{1,\alpha} ; 1 \leq \alpha \leq a\}$ in Einermengen zerlegt, man hat $\{e_{1,\alpha} ; 1 \leq \alpha \leq a\} = \{e_{1,1}\} \cup \{e_{1,2}\} \cup \dots \cup \{e_{1,a}\}$

Anzahl der Einermengen:

$$1 + q(a-1, e_H(a)-1) + q(a-1, e_H(a)-2) + \dots + q(a-1, e_H(a)-e_H(a)) = 1 + (a-1) = a.$$

Beispiel:

$$a = 23, \quad a - 1 = 22, \quad e_H(23) = 5, \quad q(22, 5 - i), \quad 1 \leq i \leq 5.$$

1. Schnitt: $q(22, 4) = 1$
2. Schnitt: $q(22, 3) = 1$
3. Schnitt: $q(22, 2) = 3$
4. Schnitt: $q(22, 1) = 6$
5. Schnitt: $q(22, 0) = 11$

Sukzessive hat man folgende Anzahlen von Teilmengen

1. Schnitt: $1 + 1 = 2$ Teilmengen
2. Schnitt: $2 + 1 = 3$ Teilmengen
3. Schnitt: $3 + 3 = 6$ Teilmengen
4. Schnitt: $6 + 6 = 12$ Teilmengen
5. Schnitt: $12 + 11 = 23$ Teilmengen

2) Modellierung im Vektorraum $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \langle e_1, e_2 \rangle_{|\mathbb{R}}$

Wir betrachten das von den Vektoren $a \cdot e_1$ und $b \cdot e_2$ (a, b ganzzahlig) anhand ihrer ortsgebundenen Repräsentanten beschriebene Rechteck mit $a \cdot b$ Gitterpunkten und identifizieren dies Rechteck mit der Menge der Einheitsquadrate $\{E_{\alpha, \beta}; 1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b\}$ im Gitter. Anhand des Zerschneidungsverfahrens kann man die Menge $\{E_{\alpha, \beta}; 1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b\}$ nach $e_H(a)$ Schnittverbänden orthogonal zu e_1 in

$1 + q(a-1, e_H(a)-1) + q(a-1, e_H(a)-2) + 1 + \dots + q(a-1, e_H(a) - e_H(a)) = a$ Teilmengen $\{E_{\alpha, \beta}; 1 \leq \beta \leq b\}_\alpha$ $1 \leq \alpha \leq a$, zerlegen.

Nach $e_H(b)$ Schnittverbänden orthogonal zu e_2 hat man jede der a Teilmengen in $1 + q(b-1, e_H(b)-1) + q(b-1, e_H(b)-2) + 1 + \dots + q(b-1, e_H(b) - e_H(b)) = 1 + (b-1) = b$ Einermengen $\{E_{\alpha, \beta}\}_{\alpha, \beta}$ $1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b$ zerlegt. .

Beispiel:

$a = 23$, siehe oben,

$b = 15$, $b - 1 = 14$, $e_H(15) = 4$, $q(14, 4 - i)$ $1 \leq i \leq 4$.

1. Schnitt: $q(14, 3) = 1$

2. Schnitt: $q(14, 2) = 2$

3. Schnitt: $q(14, 1) = 4$

4. Schnitt: $q(14, 0) = 7$

Sukzessive hat man folgende Anzahlen von Teilmengen

1. Schnitt: $(1 + 1) \cdot a = 2 \cdot a$ Teilmengen

2. Schnitt: $(2 + 2) \cdot a = 4 \cdot a$ Teilmengen

3. Schnitt: $(4 + 4) \cdot a = 8 \cdot a$ Teilmengen

4. Schnitt: $(8 + 7) \cdot a = 15 \cdot a$ Teilmengen = 345 Teilmengen.

3) Modellierung im Vektorraum $|\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{|\mathbb{R}}$

Wir betrachten den von den Vektoren $a \cdot e_1$, $b \cdot e_2$ und $c \cdot e_3$ (a, b, c ganzzahlig) anhand von ortsgebundenen Einheitsvektoren der drei Richtungen gebildeten Quader $Q(a, b, c)$ mit dem ihm innenwohnenden Gitternetz mit $a \cdot b \cdot c$ Gitterpunkten und identifizieren es mit der Menge der Einheitswürfel $\{E_{\alpha, \beta, \gamma}; 1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b, 1 \leq \gamma \leq c\}$ im Gitter.

Anhand des Zerschneidungsverfahrens hat man die Menge $\{E_{\alpha, \beta, \gamma}; 1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b, 1 \leq \gamma \leq c\}$ nach $e_H(a)$ Schnittverbänden orthogonal zu e_1 in a Teilmengen

$\{E_{\alpha, \beta, \gamma}; 1 \leq \beta \leq b, 1 \leq \gamma \leq c\}_\alpha$ $1 \leq \alpha \leq a$, zerlegt.

Nach weiteren $e_H(b)$ Schnittverbänden orthogonal zu e_2 hat man die a Teilmengen in $a \cdot b$ Teilmengen $\{E_{\alpha, \beta, \gamma}; 1 \leq \gamma \leq c\}_{\alpha, \beta}$ $1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b$ zerlegt.

Schließlich hat man nach $e_H(c)$ Schnittverbänden orthogonal zu e_3 die $a \cdot b$ Teilmengen in $a \cdot b \cdot c$ Einheitswürfel $\{E_{\alpha, \beta, \gamma}\}_{\alpha, \beta, \gamma}$ $1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b, 1 \leq \gamma \leq c$ zerlegt.

Beispiel:

$a = 23$, $b = 15$ siehe oben

$c = 4$, $c - 1 = 3$, $e_H(c) = 2$, $q(3, 2 - i)$, $1 \leq i \leq 2$

1. Schnitt: $q(3, 1) = 1$

2. Schnitt: $q(3, 0) = 2$

Sukzessive Anzahl von Teilmengen

1. Schnitt: $(1 + q(3,1))a \cdot b = (1 + 1)a \cdot b = 2a \cdot b$
2. Schnitt: $(2 + q(3,0))a \cdot b = (2 + 2)a \cdot b = 4a \cdot b = 1380$ Teilmengen.

Entsprechende Modelle des Zerschneidungsverfahrens kann man auch in Vektorräume höheren Grades bilden.

4.) Beispiel einer vierdimensionalen Anwendung des Zerschneidungsverfahrens.

Es seien e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren des Anschauungsraumes und e_4 der Einheitsvektor der Masse des von e_1, e_2, e_3 aufgespannten Einheitswürfels. Das Gebilde $G(a,b,c,d)$, (a,b,c,d ganzzahlig) besteht lokal abhängig aus jeweils d Einheitswürfeln $\{E_{\alpha,\beta,\chi} \mid 1 \leq \alpha \leq a, 1 \leq \beta \leq b, 1 \leq \chi \leq c\}$ der Masse $1 \leq \delta \leq d$.

Durch das Zerschneidungsverfahren wird in $e_H(a) + e_H(b) + e_H(c) + e_H(d)$ Schnittverbänden das Gebilde G in $a \cdot b \cdot c \cdot d$ nach Masse sortierte Einheitswürfel zerlegt.

Beispiel:

$a = 23, b = 15, c = 4$ siehe oben,

$d = 10, d - 1 = 9, e_H(d) = 4, q(9, 4 - i), 1 \leq i \leq 4$

1. Schnitt: $q(9,3) = 1$
2. Schnitt: $q(9,2) = 1$
3. Schnitt: $q(9,1) = 2$
4. Schnitt: $q(9,0) = 5$

Sukzessive Anzahl von Teilmengen:

1. Schnitt: $(1 + q(9,3)) \cdot a \cdot b \cdot c = (1 + 1) \cdot a \cdot b \cdot c = 2 \cdot a \cdot b \cdot c$
2. Schnitt: $(2 + q(9,2)) \cdot a \cdot b \cdot c = (2 + 1) \cdot a \cdot b \cdot c = 3 \cdot a \cdot b \cdot c$
3. Schnitt: $(3 + q(9,1)) \cdot a \cdot b \cdot c = (3 + 2) \cdot a \cdot b \cdot c = 5 \cdot a \cdot b \cdot c$
3. Schnitt: $(5 + q(9,0)) \cdot a \cdot b \cdot c = (5 + 5) \cdot a \cdot b \cdot c = 10 \cdot a \cdot b \cdot c = 13800$

Bei einer Zerschneidung eines n -dimensionalen Gebildes wird die n -dimensionale Raumeinheit nicht zerlegt. Getrennt werden die Kontakte von $(n-1)$ -dimensionalen Elementen der n -dimensionalen Raumeinheit.

Eine auf kombinatorische Schlüsse und topologische Interpretationen begründete Beschreibung der allgemeinen Raumeinheit im \mathbb{R}^n befindet sich auf der homepage unter:

Elemente der Raumeinheit (RE) im n -dimensionalen kartesischen Vektorraum.

